



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Cálculo de Pérdidas en la Cuba de un Transformador por el Método de los Elementos Finitos

Ingeniería Técnica Industrial – Electricidad

PROYECTO FINAL DE CARRERA

Autor:

Javier Resa Arribas

Tutor:

Diego Fernando García Gómez

Índice

1. Introducción	7
1.1. Motivación del proyecto	8
1.2. Objetivo del proyecto	9
1.3. Medios empleados	9
1.4. Estructura de la memoria	10
2. Transformadores de potencia. Tipos de flujo y pérdidas en la cuba de un transformador	11
2.1. Transformadores de potencia	12
2.2. Tipos de flujo en un transformador.....	15
2.2.1. Flujo común y flujo disperso	15
2.2.2. Flujos de secuencia directa, inversa y homopolar	20
2.2.3. Corrientes Eddy	21
2.3. Pérdidas en los elementos estructurales de un transformador.....	22
2.3.1. Pérdidas en la cuba de un transformador	24
2.3.1.1. Pérdidas en las tapas de la cuba	25
2.3.1.2. Pérdidas en las paredes de la cuba	26
2.3.1.3. Pérdidas producidas por los latiguillos de salida del transformador.....	27
2.3.1.4. Pérdidas debidas a los tornillos de apriete	29
2.3.2. Formas de reducir las pérdidas en la cuba	30
3. Métodos para el cálculo de flujo en la cuba de un transformador.....	32
3.1. Introducción a la generación de campos magnéticos.....	33
3.2. Métodos de cálculo clásicos.....	35
3.2.1. Método de las Imágenes.....	35
3.2.2. Método de Roth	38
3.2.3. Método de Rabins	41

3.3. Método de las Redes de Reluctancia.....	42
3.4. Introducción al Método de los Elementos Finitos	45
3.5. Revisión bibliográfica sobre cálculo del flujo en la cuba de un transformador	49
3.5.1. Allcock et al [All95]	49
3.5.2. Valkovic et al [Val80]	49
3.5.3. Lopez-Fernandez et al [Lop08]	50
3.5.4. Szabados et al [Sza87].....	50
3.5.5. Poloujadoff et al [Pol86].....	51
3.5.6. Mailhot et al [Mai95].....	51
 4. El Método de los Elementos Finitos.....	52
4.1. Formulación del problema.....	53
4.2. Método Variacional	56
4.2.1. Relación entre el potencial vector en un elemento finito y el potencial vector en los vértices del mismo.....	60
4.2.2. Minimización del funcional.....	63
4.3. Formulación de Galerkin.....	64
4.4. Clasificación de los problemas de campo electromagnético.....	67
4.4.1. Según la geometría.....	67
4.4.1.1. Dos dimensiones	67
4.4.1.2. Tres dimensiones	68
4.4.2. Según el tipo de análisis.....	68
4.4.2.1. Electrostático	68
4.4.2.2. Magnetostático	69
4.4.2.3. Armónico en el tiempo.....	70
4.4.2.4. Transitorio.....	70
4.4.3. Según las propiedades de los materiales	71
4.4.3.1. Lineales y no lineales	71
4.4.3.2. Isótropos y anisótropos	71
4.4.4. Según la formulación.....	72
4.4.4.1. Potencial vector magnético	72
4.4.4.2. Potencial escalar magnético.....	72

5. Estudio de un caso real con la ayuda de un programa

informático auxiliar	73
5.1. COMSOL Multiphysics.....	74
5.2. Descripción del caso de estudio	75
5.2.1. Características del transformador	76
5.2.1.1. Valores nominales.....	76
5.2.1.2. Geometría del transformador.....	78
5.2.1.3. Materiales	81
5.3. Modelo FEM para la estimación de las pérdidas en la cuba del transformador. Estudio del transformador.....	82
5.3.1. Clasificación del modelo.....	82
5.3.1.1. Geometría en dos dimensiones	82
5.3.1.2. Tipo de análisis: Armónico en el tiempo	82
5.3.1.3. Propiedades de los materiales: Lineales e isótropas	83
5.3.1.4. Formulación mediante el potencial vector magnético	83
5.3.2. Tipo de modelo	83
5.3.2.1. Modelo acimutal.....	84
5.3.3. Estrategia de modelamiento	86
5.3.4. Geometría	88
5.3.5. Fuentes	94
5.3.6. Propiedades de los materiales.....	96
5.3.7. Condiciones de frontera.....	99
5.3.8. Discretización del modelo (mallado).....	100
5.3.9. Postprocesamiento.....	104
5.3.9.1. Caso 1 (Estático y devanados en bloque)	104
5.3.9.2. Caso 2 (Armónico y devanados en bloque)	106
5.3.9.3. Caso 3 (Estático y devanados a capas)	107
5.3.9.4. Caso 4 (Armónico y devanados a capas).....	109
5.3.10. Análisis de resultados	116
5.3.10.1. Pruebas sobre el transformador real.....	116
5.3.10.2. Comparación con los resultados del modelo de elementos finitos.....	117
5.3.10.3. Posibles fuentes de error.....	119

6. Conclusiones.....	120
6.1. Importancia del estudio.....	121
6.2. Interpretación de resultados.....	121
6.3. Futuros desarrollos.....	122
7. Bibliografía.....	123
7.1. Libros y artículos.....	124
7.2. Páginas y documentos electrónicos en la red.....	126

1. Introducción

1.1. MOTIVACIÓN DEL PROYECTO

Actualmente la electricidad representa la forma más útil de energía, estando presente en todos los sectores de la sociedad gracias a su gran variedad de aplicaciones.

Las centrales de generación en España se encuentran en su mayoría alejadas de los grandes centros de consumo por diversas razones, y puesto que la energía eléctrica ha de ser consumida a la vez que generada, por sus grandes dificultades de almacenamiento, es necesario el uso de equipos eléctricos entre central y consumidor final para su correcto transporte y distribución.

Los transformadores son equipos eléctricos fundamentales en el sistema eléctrico, estando presentes en todos los tramos de recorrido de la electricidad, desde su generación en subestaciones elevadoras, hasta su consumo en centros de transformación, pasando por subestaciones de transformación y estaciones transformadoras de distribución. Mención aparte a los transformadores presentes en la inmensa mayoría de aparatos que se conectan individualmente a la red eléctrica para conseguir unos valores adecuados de tensión, corriente y forma de onda.

Dada la alta presencia de transformadores entre todos los niveles de tensión para el transporte de la energía eléctrica es necesario hacer un minucioso estudio sobre las pérdidas que en ellos se producen debido al flujo disperso que aparece en el aceite del transformador y que cierra su camino a través de la cuba.

El Método de los Elementos Finitos se presenta como una sencilla alternativa frente a otros métodos de cálculo clásico para determinar pérdidas en transformadores, entre otras muchas utilidades, resultando más sencillo hoy en día con las posibilidades que la informática nos ofrece en este ámbito.

Cabe destacar la importancia de un estudio y sus posteriores medidas correctoras para reducir pérdidas en la cuba consiguiendo aumentar el rendimiento, evitando fallos y reduciendo gastos energéticos y económicos.

1.2. OBJETIVO DEL PROYECTO

El objetivo fundamental de este proyecto es calcular el flujo que aparece en la cuba de un transformador y las pérdidas a las que da lugar, realizando el estudio de un transformador real que sirva como modelo práctico para el uso del Método de los Elementos Finitos en el ámbito de la física electromagnética.

En base a este objetivo principal, rondan los siguientes objetivos parciales:

- Entender las pérdidas que se pueden encontrar en la cuba de un transformador, la problemática que éstas pueden llegar a causar, y los recursos utilizados para paliar dichas pérdidas.
- Distinguir los métodos utilizados para el cálculo de pérdidas y clasificarlos según sus rangos de aplicación, haciendo visible cuales serían apropiados para el estudio de pérdidas en la cuba de un transformador, realizado en esta memoria.
- Comprender los fundamentos teóricos del Método de los Elementos Finitos, en sus diversas formulaciones.
- Servir como ejemplo básico de cálculo con el programa informático COMSOL Multiphysics.

1.3. MEDIOS EMPLEADOS

Para la realización de este Proyecto Fin de Carrera se ha contado con la ayuda de un programa informático llamado COMSOL Multiphysics.

Se trata de una potente herramienta capaz de resolver multitud de problemas físicos por el Método de los Elementos Finitos. COMSOL Multiphysics ha sido utilizado para llevar a cabo el estudio de un caso real, presentado los resultados de forma mucho más precisa, clara y concisa, y utilizando menor tiempo de cálculo comparándolo con un estudio manual.

1.4. ESTRUCTURA DE LA MEMORIA

Para facilitar la lectura de la memoria a continuación se incluye un breve resumen de cada uno de los capítulos que la integran.

Este proyecto se divide en siete capítulos. El primero de ellos es introductorio, incluyendo las motivaciones y objetivos principales del proyecto; el segundo introduce los transformadores de potencia, detallando los tipos de flujo que se pueden encontrar en un transformador, así como las pérdidas derivadas de dichos flujos; el tercero aborda los principales métodos que pueden ser utilizados para calcular flujos y se incluye una revisión bibliográfica sobre diferentes artículos que con anterioridad ya han abordado este tema; el cuarto capítulo se centra fundamentalmente en el Método de los Elementos Finitos, exponiendo el problema y las diferentes formas de resolverlo, para finalmente clasificar los problemas de campo electromagnético según sus características; el quinto aborda el estudio de un caso real con un transformador monofásico, exponiendo en primer lugar sus características, seguidamente realizando dicho estudio, y finalmente plasmando los resultados obtenidos comparándolos con los obtenidos en laboratorio; en el sexto capítulo se enumeran una serie de conclusiones sobre el proyecto; por último, en el capítulo siete se recogen y organizan todas las fuentes citadas en la memoria y la bibliografía consultada.

2. Transformadores de potencia. Tipos de flujo y pérdidas en la cuba de un transformador

Como se ha explicado, el principal objetivo del presente proyecto es el cálculo del flujo que circula por la cuba de un transformador así como de las pérdidas a las que da lugar.

Para alcanzar este objetivo, un paso previo es determinar qué tipo de flujos circulan por la cuba del transformador; este aspecto es tratado en el apartado 2.2, no sin antes introducir los transformadores de potencia en España en la actualidad.

Seguidamente se determina qué pérdidas producen los flujos de dispersión y más concretamente qué tipos de pérdidas se tienen en la cuba de un transformador, este aspecto es tratado en el apartado 2.3. El presente capítulo finaliza con una descripción de los métodos utilizados para reducir las pérdidas en la cuba de un transformador.

2.1. TRANSFORMADORES DE POTENCIA

En los últimos años la demanda energética ha subido enormemente y continúa en ascenso, debido principalmente al aumento demográfico y a la alta industrialización.

El principal problema de la electricidad radica en su dificultad de almacenaje, por lo que la generación debe producirse conforme a la demanda, y consumirse de manera instantánea. Dado que los grandes centros de consumo se encuentran alejados de las grandes centrales de generación, es necesario transportar la energía de forma que el rendimiento sea máximo, minimizando las pérdidas.

Una de las medidas tomadas para reducir dichas pérdidas pasa por transformar la energía a unos valores de tensión determinados, según convenga. Así, el transporte es realizado a muy alta tensión para reducir la corriente a valores muy bajos y conseguir que las pérdidas en el transporte (definidas como $P=3 \cdot R \cdot I^2$, donde R es la resistencia de los conductores e I es la corriente) se minimicen, para posteriormente, conforme la línea se acerca a los consumidores, disminuir los valores de tensión hasta la tensión de consumo.

La simbología de un transformador en un esquema eléctrico se muestra en la figura 2.1.

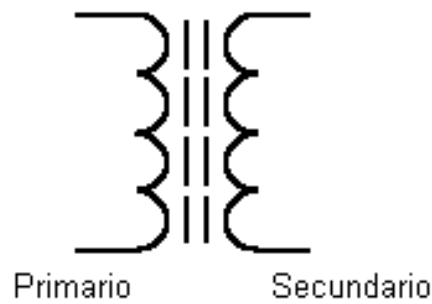


Figura 2.1. Simbología de un transformador en un esquema eléctrico.

Existen transformadores monofásicos, en los que sólo hay un bobinado de alta tensión y otro de baja, y la tensión sólo tiene una fase. En la figura 2.2 aparece representado un transformador monofásico, con su núcleo magnético, su bobinado de alta tensión (bobina A) y su bobinado de baja tensión (bobina B).

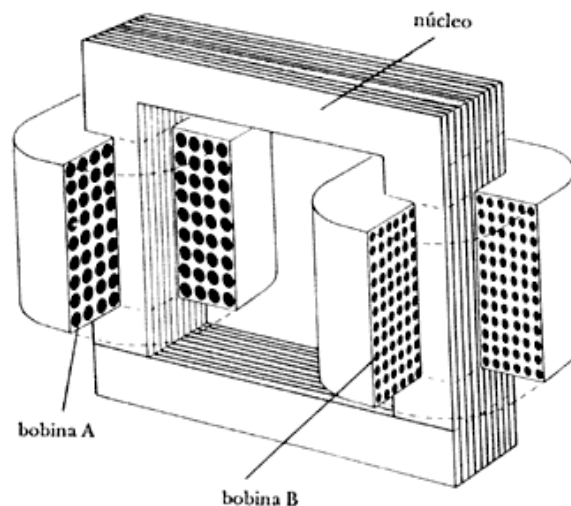


Figura 2.2. Representación de un transformador monofásico.

En la figura 2.3 se muestra un transformador trifásico real. Hay tres bobinados de alta tensión y tres de baja tensión arrollados de forma concéntrica, cada uno en una de las tres columnas del transformador.

Los transformadores trifásicos son alimentados por tres tensiones de igual magnitud pero desfasadas 120° , constituyendo una tensión trifásica.



Figura 2.3. Foto de transformador trifásico real.

Los transformadores utilizados en las redes de transporte, se pueden clasificar en:

- Transformador elevador : Típicamente situado a la salida del alternador de los distintos tipos de centrales eléctricas, su principal misión consiste en elevar la tensión a la salida del alternador (entre 6kV y 20kV) hasta un valor apropiado para su transporte (400kV o 220kV), y reducir así las pérdidas ocasionadas por la corriente que circula por los conductores.
- Transformador reductor: Están situados en subestaciones de transformación entre dos tramos de la red, su función la de reducir paulatinamente la muy alta tensión de transporte a unos niveles mucho más bajos para su consumo ($<1\text{kV}$).

-Transformadores de medida y protección: Utilizados para convertir valores de tensión o corriente a los adecuados para la aparamenta de baja tensión que debe medir ciertas magnitudes de la red eléctrica, o para proteger a la red ante valores anómalos de alguna de sus variables.

-Otros transformadores: Cada aparato que se deba conectar a la red eléctrica para su funcionamiento lleva interno un transformador para adecuar las magnitudes a unos valores adecuados, variables según cada instrumento.

Actualmente, según [1], el número de transformadores en la completa distribución de electricidad supera con creces las 330.000 unidades por lo que su estudio es de gran importancia, así que seguidamente se definen los diferentes tipos de flujo y las pérdidas a las que dan lugar en la cuba de un transformador de potencia.

2.2. TIPOS DE FLUJOS EN UN TRANSFORMADOR

2.2.1. FLUJO COMÚN Y FLUJO DISPERSO

Como se explica ampliamente en [2], en un transformador hay dos tipos de flujo: el flujo común y los flujos de dispersión. El flujo común circula por el núcleo magnético y atraviesa ambos arrollamientos. El flujo disperso concatena únicamente a uno de los arrollamientos (primario o secundario) como se muestra en la figura 2.4, en la que el flujo común se denota como ϕ_m , y el flujo de dispersión se expresan como ϕ_{L1} (flujo de dispersión de primario) y ϕ_{L2} (flujo de dispersión de secundario).

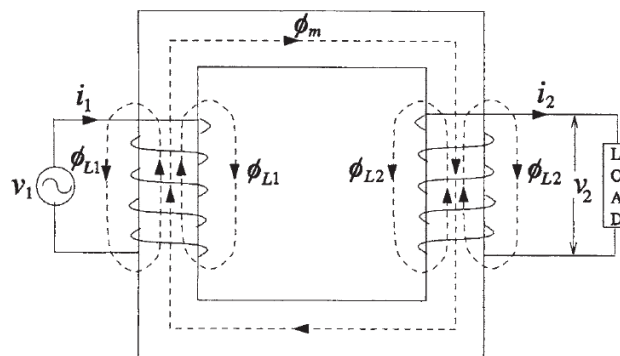


Figura 2.4. Representación de los flujos común y disperso en un transformador. [2]

En la figura 2.4:

v_1 es la tensión en el arrollamiento primario del transformador medida en V.

i_1 es la corriente que circula por el arrollamiento primario medida en A.

v_2 es la tensión en el arrollamiento secundario del transformador medida en V.

i_2 es la corriente que circula por el arrollamiento secundario medida en A.

$LOAD$ representa la carga a la que está conectado el transformador.

Aplicando la ley de Ampere a una de las líneas de flujo disperso (por ejemplo a una línea de flujo de dispersión del bobinado primario) se tiene:

$$\oint \vec{H}_{L1} d\vec{l} = N_1 i_1 \quad (2.1)$$

Donde:

\vec{H}_{L1} es el vector campo magnético del flujo disperso medido en $A \cdot vuelta/m$.

\vec{l} es la distancia que recorre el campo magnético medida en m.

N_1 es el número de espiras.

i_1 es la corriente medida en A.

De donde se deduce que el campo magnético que da origen al flujo disperso es creado tan sólo por los amperios-vuelta del arrollamiento al cual concatena. Por tanto la cuantía del flujo disperso depende de la intensidad que circula por el arrollamiento correspondiente.

A diferencia del flujo disperso, en un transformador de dos arrollamientos, el flujo común concatena ambos arrollamientos (figura 2.4). Si se aplica la ley de Ampere a una línea cerrada como la indicada en línea de puntos se obtiene:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = N_1 i_1 - N_2 i_2 \quad (2.2)$$

De donde se deduce que el flujo común es creado por la acción conjunta de los amperios-vuelta del arrollamiento primario y del secundario.

En un transformador real la relación que liga la tensión aplicada es:

$$\vec{U}_1 = R_1 \vec{I}_1 + jX_{L1} \vec{I}_1 + \vec{E}_1 \quad (2.3)$$

Donde:

U_I es la tensión aplicada medida en V.

I_I es la corriente medida en A.

E_I es la fuerza electromotriz engendrada por el flujo común medida en V.

R_I es la parte real de la impedancia del arrollamiento medida en Ω .

X_{LI} es la parte imaginaria de la impedancia del arrollamiento medida en H.

La representación del arrollamiento, incluyendo sus condiciones resistiva e inductiva, se expone en la figura 2.5.

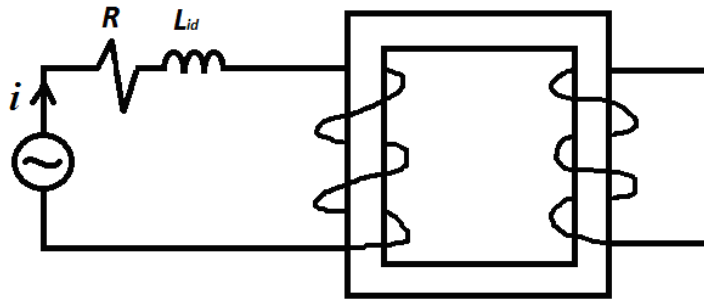


Figura 2.5. Esquema eléctrico del arrollamiento de un transformador.

En la ecuación (2.4) las caídas de tensión internas en el arrollamiento primario ($R_I I_I$ y $jX_{LI} I_I$) son mucho menores que la fuerza electromotriz inducida, de modo que de forma aproximada se puede escribir:

$$\vec{U}_1 \approx \vec{E}_1 \quad (2.4)$$

La fuerza electromotriz engendrada en el arrollamiento por el flujo común es la derivada del flujo común en el tiempo:

$$E_1 = j\omega N_1 \Phi \quad (2.5)$$

Donde:

Φ es el flujo magnético medido en Wb.

ω es la frecuencia angular medida en rad/s.

Tomando módulos en la expresión (2.5) queda:

$$E_1 = 4,44 f N_1 \Phi \quad (2.6)$$

Donde:

f es la frecuencia medida en Hz.

Y teniendo en cuenta la ecuación (2.4) se llega a:

$$U_1 \approx 4,44 f N_1 \Phi \quad (2.7)$$

Es decir, que despreciando las caídas de tensión internas en el arrollamiento primario se puede afirmar (de forma aproximada) que el valor del flujo común viene impuesto por la tensión aplicada al primario.

Resumiendo lo visto, en un transformador existen dos tipos de flujo, el flujo común y el flujo disperso. El primero de estos flujos depende de la tensión aplicada al primario mientras que el segundo depende de la corriente en los arrollamientos.

Hasta aquí se ha considerado que las líneas de inducción o bien concatenan un arrollamiento o bien no lo concatenan. Sin embargo, eso es una simplificación excesivamente burda de la realidad. Un arrollamiento está compuesto de un gran número de espiras, y puede ocurrir que una línea de inducción concatene algunas de estas espiras pero no otras. Por tanto, un dibujo más representativo de la distribución de flujo disperso en un transformador se muestra en la figura 2.6. Aplicando la ley de Ampere a líneas como las indicadas en la figura 2.6 con un valor de x progresivamente creciente desde $x=0$ hasta $x=r_1+a_2+\delta+a_1$ se obtiene que el campo magnético que da origen al flujo de dispersión en el eje x es el mostrado en el trapecio de la figura 2.7.

Donde:

X es la distancia en el eje x desde la pared del núcleo más próxima hasta la mitad del arrollamiento de baja tensión medida en m.

r_1 es la distancia en el eje x desde la pared del núcleo más próxima hasta el comienzo del bobinado de baja tensión medida en m.

a_1 es la anchura en x del arrollamiento de alta tensión medida en m.

δ es la distancia de separación entre arrollamientos medida en m.

a_2 es la anchura en x del arrollamiento de baja tensión medida en m.

En la figura 2.6 se ilustran todas estas magnitudes.

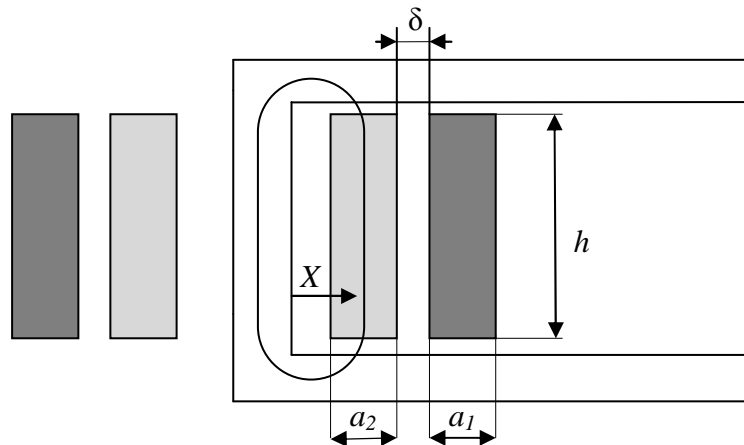


Figura 2.6. Línea de circulación para aplicar la ley de Ampere al cálculo de campos magnéticos de dispersión en un transformador. [2]

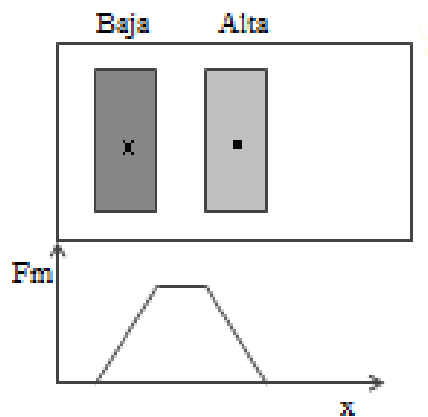


Figura 2.7. Campo magnético que da origen al flujo de dispersión en el eje x. [2]

En la figura 2.7:

x representa que el sentido de la corriente en el arrollamiento de baja tensión circula en la dirección perpendicular al plano de corte, y con sentido desde el observador hacia dentro del papel.

- representa que el sentido de la corriente en el arrollamiento de alta tensión circula en la dirección perpendicular al plano de corte, y con sentido desde dentro del papel hacia el observador.

El objetivo de este proyecto es el cálculo de las pérdidas en la cuba del transformador, para lo cual en primer lugar se debe determinar qué flujos circulan por la cuba. A este respecto cabe extraer las siguientes conclusiones de este apartado:

- El flujo común transcurre en su práctica totalidad por el circuito magnético.
- El flujo de dispersión del arrollamiento interno circula por el canal existente entre los dos arrollamientos del transformador y cierra su camino por el núcleo magnético, como se indica en la figura 2.4. Si embargo, el flujo de dispersión del arrollamiento externo circula por el canal existente entre ambos arrollamientos pero cierra su camino por la cuba (como se indicará en el apartado 2.3.1.2 de este mismo documento) por eso, la cuantía de los dos flujos de dispersión no es la misma, si bien para muchos de los problemas que se desean resolver (por ejemplo caídas de tensión, cálculo de fuerzas entre arrollamientos, etc.) no es preciso diferenciar entre el flujo de dispersión del arrollamiento interno y el flujo de dispersión del arrollamiento externo.

2.2.2. FLUJOS DE SECUENCIA DIRECTA, INVERSA Y HOMOPOLAR

Para estudiar el funcionamiento de un transformador en condiciones desequilibradas se descompone la corriente en sus arrollamientos primario y secundario en tres sistemas, uno de secuencia directa, otro de secuencia inversa y un tercero de secuencia homopolar.

Cada uno de los sistemas de corriente mencionados crea su flujo común y su flujo disperso, como se indicó en el apartado anterior. Por lo que se refiere a los sistemas de secuencia directa y de secuencia inversa, los flujos comunes de las tres columnas son iguales en magnitud y desfasados 120° , por lo que su suma es nula al llegar al punto común del circuito magnético. Sin embargo, el flujo común creado por las corrientes de secuencia homopolar, las cuales son iguales en magnitud y están en fase ($\phi_{01}, \phi_{02}, \phi_{03}$), al llegar al punto común del circuito magnético no suma cero y deben cerrar su camino por el exterior del circuito magnético (ϕ_{0T}) como se muestra en la figura 2.8. Dado que el camino de ese flujo es un camino de alta reluctancia, para crear este flujo se precisa una corriente elevada, al contrario de lo que se precisa para crear el flujo común de secuencia directa o inversa.

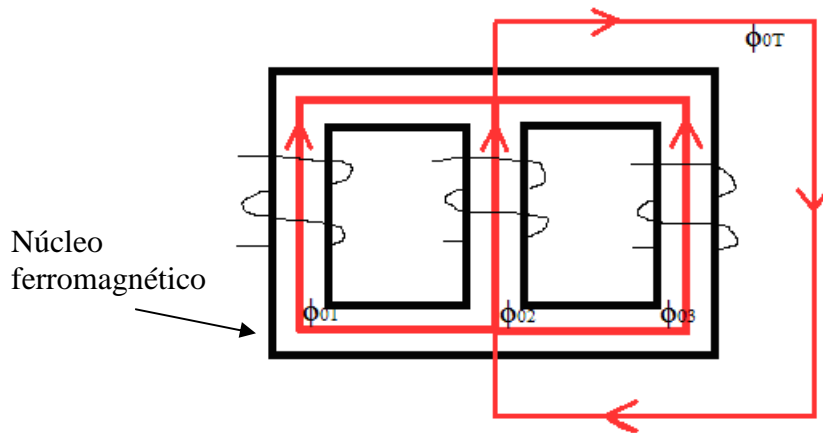


Figura 2.8. Recorrido del flujo homopolar en un transformador trifásico.

2.2.3. CORRIENTES EDDY

Las corrientes Eddy ([2]), también conocidas como corrientes de Foucault, se producen cuando un conductor en movimiento atraviesa un campo magnético, o un conductor es atravesado por un campo magnético variable. En un transformador de potencia la principal causa de aparición de estas corrientes son los flujos de dispersión que se crean dentro de la máquina eléctrica.

El flujo disperso aumenta con el incremento de la impedancia de cortocircuito de la máquina. Por ello este tipo de pérdidas son más importante en transformadores grandes, dado que son los que tienen una mayor impedancia de cortocircuito. Las corrientes Eddy también aumentan al producirse incremento de flujo disperso. Otro factor de gran importancia es el nivel de carga al que se encuentre trabajando el transformador, a mayor factor de carga, más flujo disperso.

Las corrientes Eddy dependen de las dimensiones de los conductores, en concreto de la dimensión del conductor perpendicular a las líneas de flujo disperso. Las pérdidas Eddy totales son la suma de las pérdidas debidas al flujo de dispersión radial más las pérdidas por flujos axiales.

Por ejemplo, en un solenoide infinitamente largo el flujo creado es paralelo al eje del solenoide. Sin embargo los arrollamientos de un transformador no son solenoides de longitud infinita, sino que tienen una altura finita. Debido a ello, en los bordes del cilindro las líneas de flujo se curvan y con ello crece la componente radial del campo magnético disperso en detrimento de la componente axial. Por ello las pérdidas Eddy no son uniformes a lo largo de toda la altura del arrollamiento. Frecuentemente, las

mayores pérdidas se tienen en los extremos del cilindro. Como la parte superior de los arrollamientos está bañada en un aceite más caliente que el aceite de la parte inferior, el hecho de que las pérdidas en el cobre sean superiores en la parte superior de los arrollamientos junto con el hecho de que el aceite que llega a esa parte es aceite que está más caliente puede hacer que aparezcan puntos calientes en dicho extremo de los arrollamientos y con ello que esta parte del aislamiento envejezca de forma prematura.

En los arrollamientos por capas las pérdidas no se distribuyen de manera uniforme sobre cada una de las capas, sino que las pérdidas son distintas en cada una.

Para reducir este tipo de pérdidas se pueden usar varias soluciones aunque, al no suponer un alto porcentaje en las pérdidas totales de un transformador, habría que llegar a un compromiso entre costes y reducción de pérdidas Eddy, puesto que quizás la solución propuesta conlleve unos gastos demasiado altos, [3].

Una forma de reducir este tipo de pérdidas puede ser el uso de dos tipos de conductores con dimensiones diferentes, de manera que sean más estrechos en la parte central del arrollamiento y de menor altura en las partes de los extremos.

Una segunda forma supone colocar en los discos de los extremos superior e inferior menos espiras que en los centrales, siempre y cuando el arrollamiento del transformador se constituya de discos.

En el estudio de caso real, realizado en el capítulo 5 de esta memoria, se tienen en consideración estas corrientes, así como sus efectos y contribuciones en las pérdidas en la cuba del transformador.

2.3. PÉRDIDAS EN LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES DE UN TRANSFORMADOR

Las pérdidas de potencia activa en un transformador de potencia son las siguientes:

- Pérdidas en el circuito magnético debidas al paso del flujo común.
- Pérdidas debidas por efecto Joule (RI^2) a la circulación de corriente por los arrollamientos.

-Pérdidas parásitas, originadas por el flujo disperso en los conductores (pérdidas Eddy en los conductores), en la cuba (por histéresis y por corrientes de Foucault) y en el resto de elementos estructurales (tornillos, vigas de apriete, shunts magnéticos, etc.).

Los transformadores de potencias elevadas se diseñan con valores elevados de la impedancia de cortocircuito porcentual, y por tanto con un elevado flujo de dispersión. Por ello, para transformadores de alta potencia la proporción de las pérdidas parásitas en el total de la pérdida de carga puede aumentar de manera significativa, lo cual provoca un aumento de la temperatura, produciendo que el estado del transformador empeore y que su vida se acorte, con lo cual es necesario analizarlas.

Como se indica en [2], es necesario optimizar el costo del material. Generalmente se intenta reducir el tamaño total del transformador para dar lugar a la reducción de distancias eléctricas y magnéticas. Como efecto negativo se incrementan aún más las pérdidas parásitas. Es muy importante conocer y estimar con precisión todas las componentes de las pérdidas en un transformador, ya que cada kW de pérdida de carga supone pérdidas económicas. En los transformadores grandes, una reducción de las pérdidas parásitas de 3 ó 5 kW puede dar una ventaja competitiva en el mercado muy considerable.

Las pérdidas en los componentes estructurales pueden formar una gran parte (mayores al 20%) de las pérdidas totales debidas a la carga si no son controladas adecuadamente, especialmente en autotransformadores. En esos casos el rendimiento del transformador se puede ver reducido en una cierta cuantía. Una parte importante de las pérdidas parásitas se produce en aquellas partes estructurales que tienen un área de gran tamaño, como por ejemplo la cuba, elemento en el cual más adelante se centra este trabajo. Las pérdidas en los elementos de sujeción con un área más pequeña son menores, pero la inducción incidente en ellos puede ser muy alta con lo que se pueden provocar aumentos locales de temperatura que afectan gravemente a la vida del transformador.

Estas pérdidas en los componentes estructurales dependen de forma compleja de parámetros tales como la magnitud del flujo de dispersión, frecuencia, resistencia o el tipo de excitación (sinusoidal, distorsionada, etc.).

Hasta 1980, se realizaron múltiples tareas en el ámbito de la evaluación de las pérdidas por métodos analíticos. Estos métodos tienen ciertas limitaciones y no se pueden aplicar a geometrías complejas. Con el rápido desarrollo de métodos numéricos, como el Método de Elementos Finitos (MEF), el cálculo de las pérdidas por corrientes de

Foucault en los componentes metálicos del transformador es ahora más fácil. Algunos problemas tridimensionales complejos cuando se resuelven mediante el uso de formulaciones en 2-D (con aproximaciones importantes) llevan a imprecisiones significativas. La evolución comercial de paquetes de software FEM 3-D desde 1990 ha permitido a los diseñadores simular la compleja estructura electromagnética de los transformadores para reducir las pérdidas y la eliminación de puntos calientes. Sin embargo, el análisis por elementos finitos puede requerir bastante tiempo y esfuerzo. Así, el método de cálculo de las pérdidas parásitas debe ser juiciosamente elegido y, siempre que sea posible, el diseñador debe disponer de ecuaciones y programas informáticos de análisis que proporcionen un cálculo rápido y razonablemente preciso.

El cálculo de pérdidas no es una tarea sencilla debido a que el transformador es una estructura altamente asimétrica y en tres dimensiones. El cálculo se complica, como se puede observar ampliamente en [2] por:

- Permeabilidad del hierro no constante (relación B-H no lineal).
- Dificultad en el cálculo rápido y preciso del campo magnético y sus efectos.
- Imposibilidad de aislar los componentes para evaluar cada una de las pérdidas y desglosar las pérdidas debidas a la carga en sus diferentes sumandos.
- Limitaciones de los métodos de verificación experimental para grandes transformadores de potencia.

Como se ha indicado, las mayores pérdidas en elementos estructurales se producen en la cuba, dado su gran área y volumen y su relativa cercanía a la parte activa del transformador, por lo que a continuación se detallan dichas pérdidas de gran importancia.

2.3.1. PÉRDIDAS EN LA CUBA DE UN TRANSFORMADOR

Las pérdidas en la cuba forman una parte importante de las pérdidas en los transformadores de gran potencia. Pueden existir corrientes parásitas en las paredes del tanque del transformador. Aunque la densidad de flujo de dispersión en la pared del tanque es baja, las pérdidas de todo el depósito pueden ser altas debido a su gran área.

Sin embargo, rara vez se desarrollan puntos calientes en el tanque, ya que el calor es evacuado fácilmente por el aceite. La buena conductividad térmica del material del depósito también ayuda a mitigar los puntos calientes.

En los transformadores hay fundamentalmente dos tipos de excitación de la superficie metálica, pérdidas en las paredes de la cuba y pérdidas en las tapas de la cuba que surgen por las altas corrientes producidas tanto en conductores como en arrollamientos.

A continuación se detallan estas diferentes pérdidas según su zona de localización.

2.3.1.1. PÉRDIDAS EN LAS TAPAS DE LA CUBA

Las pérdidas en las tapas de la cuba se producen en aquellas zonas del tanque que son atravesadas perpendicularmente por los conductores, como se explica ampliamente en [2], dado que en algún punto tendrán que traspasar la tapa superior para conectar el transformador con el resto del sistema eléctrico, externo a la cuba. La corriente del conductor crea un campo magnético tangencial, directamente proporcional a esa intensidad de corriente, que circula por la tapa de la cuba alrededor de estas zonas generando pérdidas. La intensidad de campo magnético en la superficie de la placa se puede determinar aproximadamente por el principio de superposición. En la figura 2.9 se ilustra este suceso.

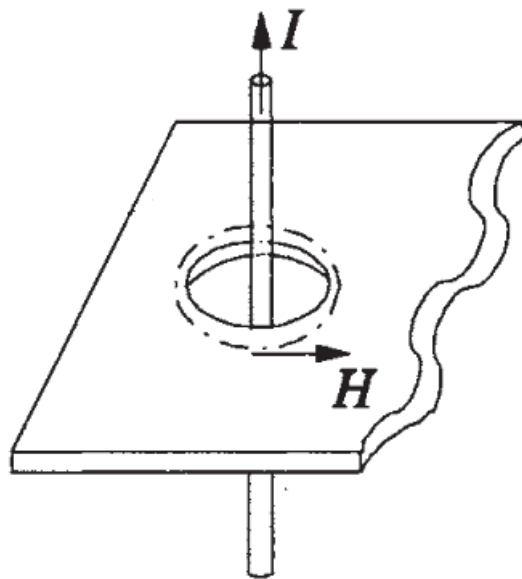


Figura 2.9. Circulación de campo magnético H en las bornas de entrada y salida del transformador. [2]

Así mismo, las bornas de entrada y salida del transformador deberán estar diseñadas para soportar cambios bruscos de intensidad aguantando los esfuerzos y para disipar el calor asociado a las pérdidas del conductor.

Más adelante se detallan debidamente las distintas formas de reducir estas pérdidas en las tapas.

2.3.1.2. PÉRDIDAS EN LAS PAREDES DE LA CUBA

En las paredes de la cuba también se produce la circulación de flujo magnético, ya que el flujo de dispersión creado por el arrollamiento más externo al núcleo magnético tiende a buscar el camino de menor reluctancia. Debido a que la cuba está formada por un material cuyas propiedades magnéticas no son muy buenas, y el área del ciclo de histéresis es elevada, se generarán pérdidas de gran importancia, y deben ser estudiadas debidamente.

Tal y como se explica en [2], la componente del flujo magnético perpendicular a la cuba puede ser considerada como proporcional a la intensidad de corriente del arrollamiento. Sin embargo, cuando el flujo disperso penetra en la pared de la cuba su distribución no es uniforme, debido al apantallamiento producido por las corrientes de Foucault que se engendran en la cuba. En algunas formulaciones de cálculo de pérdidas, la pérdidas se calculan en base a la componente tangencial de la inducción, que deben ser obtenida a partir de la componente normal del flujo magnético con la ayuda de las ecuaciones de Maxwell.

En la figura 2.10 se ilustra este suceso.

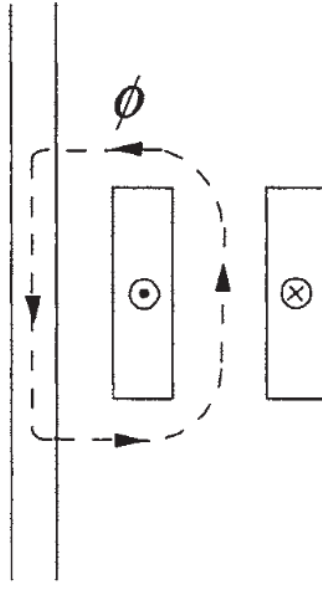


Figura 2.10. Circulación del flujo disperso por las paredes de la cuba del transformador. [2]

Las pérdidas en la cuba serán más grandes cuanto más próximos estén los arrollamientos de la cuba, dado que en estos casos la reluctancia que se opone al paso del flujo es menor, [3]. En los transformadores pequeños los arrollamientos están suficientemente separados de la cuba. A medida que crece la potencia de un transformador crece su tamaño, pero las proporciones se mantienen. No obstante, a partir de una determinada potencia (que de manera estimada se puede cifrar en 100 o 150 MVA) las restricciones impuestas por el transporte de los transformadores desde la fábrica al lugar de utilización hacen que los transformadores ya no sean geoméricamente semejantes y que las distancias entre los arrollamientos y las paredes de la cuba sean proporcionalmente menores. Además, los transformadores de grandes potencias tienen corrientes nominales elevadas, por lo que el número de amperios-vuelta de los arrollamientos es elevado. Todo ello hace que en los transformadores de grandes potencias las pérdidas en la cuba sean tan importantes.

2.3.1.3. PÉRDIDAS PRODUCIDAS POR LOS LATIGUILLOS DE SALIDA DEL TRANSFORMADOR

Estas pérdidas se producen cuando los latiguillos de salida de los arrollamientos (o barras de distribución) llevan corrientes elevadas, las cuales crean campos magnéticos que inducen corrientes Eddy en la pared de la cuba, las cuales originan dichas pérdidas.

Las barras de distribución suelen ser paralelas a la pared de la cuba a una determinada distancia (figura 2.11). Dado que las barras de distribución existen en las tres fases, la cuestión recae en cómo las agrupaciones de 2 ó 3 barras de diferentes fases afectarán a las pérdidas. Intuitivamente se espera una reducción en las pérdidas por cancelaciones de campos magnéticos entre las diferentes fases.

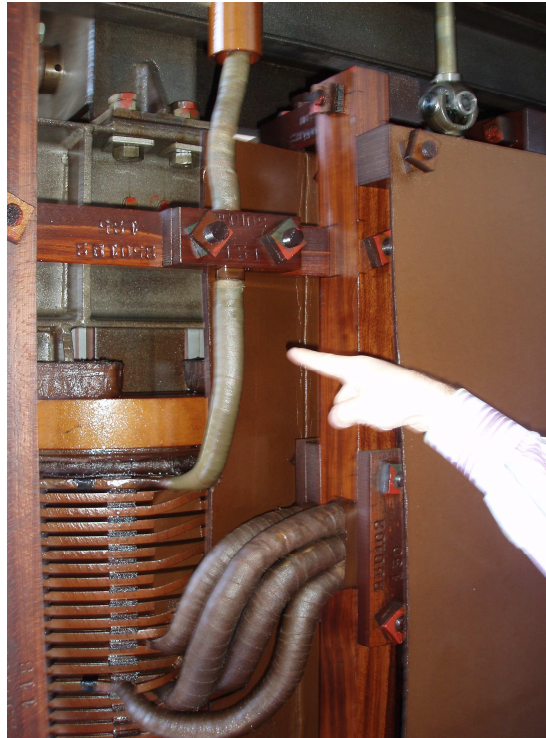


Figura 2.11. Barras de distribución en un transformador real.

Las pérdidas debidas a las barras de distribución están bastante limitadas y se pueden minimizar de manera considerable, como se muestra en [4], donde además se estudian 3 configuraciones distintas de barras de distribución y se comparan resultados, siendo la mejor opción la que aparece en la figura 2.12 frente a otras configuraciones usando una o dos barras solamente. Las pérdidas se ven reducidas a la tercera parte de las obtenidas en caso de usar una sola barra de distribución. Además, en este caso poner el escudo de aluminio no ofrece demasiada mejora, escudar la cuba sólo ofrece ventajas al tratar con una configuración de una o dos barras de distribución. Esto es debido a que las 3 corrientes de fase por cada barra de distribución suman cero para cualquier instante de tiempo, produciendo un pequeño campo magnético a distancias relativamente grandes respecto al conductor.

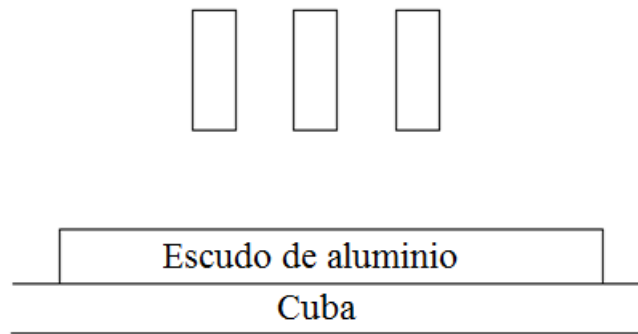


Figura 2.12. Estado del transformador con tres barras de distribución y geometría de escudo.

2.3.1.4. PÉRDIDAS DEBIDAS A LOS TORNILLOS DE APRIETE

Un aspecto importante que influye en el campo electromagnético en la cuba de un transformador, y que resulta significativo en el rendimiento, es el análisis de la temperatura en los tornillos de apriete entre la cuba y la cubierta. Las corrientes que se inducen en la cuba y en la cubierta suelen cerrar su camino a través de la cabeza de los tornillos. Si las corrientes inducidas que pasan a través de los tornillos son elevadas, se produce un sobrecalentamiento de los mismos, creando puntos calientes. El flujo de estas corrientes de inducción a través de los tornillos puede evitarse aislándolos completamente de la cuba y de la cubierta.

El paso de estas corrientes por los tornillos causa diversos problemas. Por un lado, las corrientes inducidas se pueden concentrar en el área de las cabezas de los tornillos provocando un punto caliente, o sobrecalentamiento local, que a lo largo del tiempo deteriora las juntas entre las piezas. Otro problema que se puede producir es un mal contacto electromagnético entre la cuba y la cubierta, lo que incrementa la fuerza magnetomotriz, provocando un campo magnético considerable en la superficie de los tornillos corriendo el riesgo de que aparezcan unas pérdidas excesivas debidas a las corrientes Eddy.

2.3.2. FORMAS DE REDUCIR LAS PÉRDIDAS EN LA CUBA

Las pérdidas en los componentes estructurales se consiguen reducir en los siguientes casos, [2]:

- Con la utilización de material laminado.
- Con uso de materiales de alta resistencia.
- Reducción del flujo magnético mediante el uso de materiales de menor permeabilidad.

Un método particular para este último caso enunciado para reducir pérdidas, en particular las que se producen en las tapas del transformador próximas a los conductores, consiste en el uso de materiales de baja permeabilidad, como el acero inoxidable, insertado en las aberturas de salida de los conductores, como se observa en la figura 2.13. Esta configuración reduce significativamente la permeabilidad efectiva del campo magnético que se distribuye concéntricamente desde el centro de la apertura, limitando por tanto el valor de las pérdidas en esta parte de la cuba a la cual se debe prestar mayor atención trabajando con altas corrientes, pudiendo dar lugar a puntos calientes.

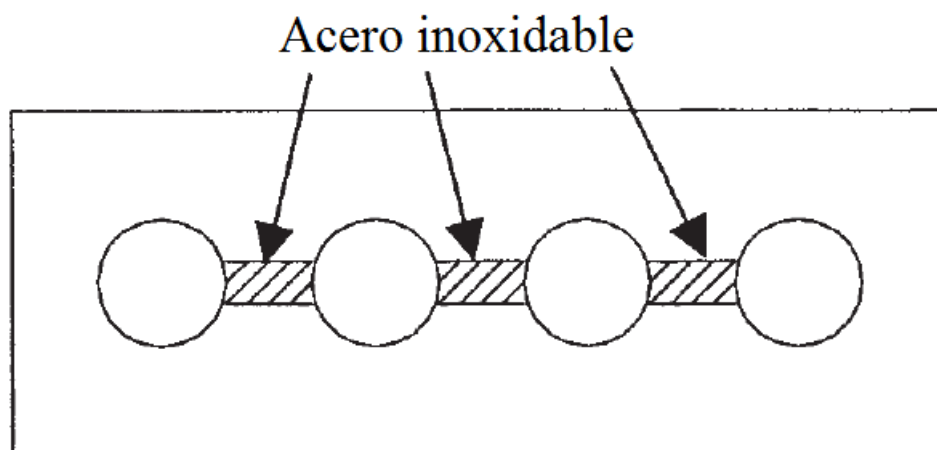


Figura 2.13. Acero inoxidable insertado en las aberturas de salida de los conductores. [2]

Además, existen tres métodos que se utilizan comúnmente para reducir las pérdidas parásitas en el tanque, [2]:

- El primer método utiliza derivaciones magnéticas (habitualmente denominados shunts magnéticos) que recogen el flujo de dispersión que sale de las bobinas y lo canalizan de forma tal que haya muy poco flujo externo al núcleo y las bobinas.
- En segundo lugar, se pueden poner shunts magnéticos en el tanque para que lleven la mayor parte del flujo.
- En tercer lugar, el depósito puede ser forrado con placas de aluminio o cobre (escudos), dado que las corrientes de Foucault en estas placas tienden a proteger el tanque de la mayor parte del flujo incidente radial.

3. Métodos para el cálculo de flujo en la cuba de un transformador

Antes de calcular las pérdidas en la cuba de un transformador es necesario conocer el flujo que circula por la misma. La determinación del flujo que circula por la cuba es uno de los cálculos más difíciles para el diseño de un transformador. En este capítulo se realiza un resumen de los diferentes métodos utilizados para el cálculo de los flujos en un transformador. En cada uno de los métodos se indica si el procedimiento es válido para el cálculo del flujo en la cuba o no. El capítulo finaliza con una revisión bibliográfica de una serie de artículos técnicos que cuentan la forma en la que los autores determinan el flujo en la cuba del transformador.

3.1 INTRODUCCIÓN A LA GENERACIÓN DE CAMPOS MAGNÉTICOS

La ecuación que proporciona el campo magnético creado por una distribución de corriente es la siguiente [5]:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.1)$$

Donde:

\vec{H} es el vector campo magnético medido en A/m .

\vec{J} es el vector densidad de corriente medido en A/m^2 .

ε es la permitividad eléctrica.

\vec{E} es el campo eléctrico medido en V.

Para el caso de campos magnéticos creados por corrientes de baja frecuencia (hasta el orden de megahercios), el segundo sumando de la ecuación adquiere una importancia inapreciable frente al primero, por lo que resulta la siguiente expresión:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} \quad (3.2)$$

La relación entre el campo magnético aplicado al material y la inducción resultante es la siguiente:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (3.3)$$

Donde:

\vec{B} es el vector inducción magnética existente en un punto P del espacio medido en T.

μ_0 es la permeabilidad en vacío.

Introduciendo en la anterior expresión el potencial vector A, definido como:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (3.4)$$

Existen múltiples soluciones para el potencial vector que satisfacen la ecuación anterior. Para que el potencial vector resulte único se ha de imponer otra condición al potencial. Frecuentemente se impone la condición conocida como Gauge de Coulomb que se define como:

$$\text{div}\vec{A} = 0 \quad (3.5)$$

Si la ecuación (3.2) se expresa en términos del potencial vector se puede escribir de la siguiente forma:

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \quad (3.6)$$

Lo cual escrito en forma simbólica:

$$\nabla_x \nabla_x \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (3.7)$$

Según se muestra en [6] resulta:

$$\vec{\nabla}_x \vec{\nabla}_x \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (3.8)$$

Finalmente, de las ecuaciones (3.6) y (3.8), y teniendo en cuenta la condición anteriormente descrita en la ecuación (3.5) se llega a esta igualdad:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (3.9)$$

3.2. MÉTODOS DE CÁLCULO CLÁSICOS

La geometría de un transformador es compleja y en el interior del mismo hay materiales con diferentes permeabilidades y por los que pueden circular corrientes inducidas (corrientes de Foucault o corrientes Eddy expuestas en el punto 2.1.3.). Con todo ello la resolución de la ecuación (3.9) se complica.

A continuación se muestran los métodos clásicos que se pueden utilizar para el cálculo del flujo en un transformador, si bien algunos de los métodos que se comentan no son útiles para el cálculo del flujo que circula por la cuba, porque no se cumplen las condiciones de simetría que ciertos métodos requieren.

3.2.1. MÉTODO DE LAS IMÁGENES

El Método de las Imágenes busca resolver un problema diferente al problema original pero cuya solución coincida con la del problema que se desea resolver, [2]. El Método de las Imágenes es una extrapolación del principio de las imágenes eléctricas, del cual recibe el nombre.

Para explicar el principio del método se considera la figura 3.1, que representa la ventana de un transformador con un arrollamiento de baja tensión y un arrollamiento de alta tensión. Como condición se desprecia la curvatura del arrollamiento.

Para calcular el campo magnético creado por un circuito cualquiera recorrido por una corriente de intensidad en un medio homogéneo se aplica la ley de Biot-Savart, definida en la ecuación (3.10).

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{u_t \times u_r}{r^2} dl \quad (3.10)$$

Donde:

u_t es un vector unitario cuya dirección es tangente al circuito y que indica el sentido de la corriente en la posición donde se encuentra el elemento dl .

u_r es un vector unitario que señala la posición del punto P respecto del elemento de corriente.

r es la distancia entre el conductor y el punto del espacio donde se calcula la inducción.

Mediante la ecuación (3.10) se puede expresar el valor del vector campo magnético en cada punto como suma de las contribuciones de cada elemento diferencial. Tal procedimiento es válido sólo si el medio es homogéneo. Sin embargo, en el ejemplo de la figura 3.1 hay dos materiales: aire y hierro.

La presencia del hierro impone las siguientes dos restricciones:

- La primera restricción se debe al diferente valor de la permeabilidad de los dos materiales y a que la componente normal de la inducción magnética B es continua en el paso de un medio al otro. Debido a esto, el valor del campo magnético H debe ser diferente en un material que en el otro.
- La segunda restricción a tener en cuenta se da cuando una línea de inducción pasa de un medio al otro, ya que dicha línea sufre una refracción, de forma que la relación entre el ángulo de incidencia y el ángulo de refracción es la expresada en la siguiente ecuación:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \quad (3.11)$$

En caso de considerar la permeabilidad del hierro infinita, estas dos restricciones se resumen en el supuesto del valor nulo del campo magnético H en el hierro, dado que dicha condición es la única que cumple que B tenga un valor finito mientras que la permeabilidad es infinita. Otra consecuencia derivada de dicha consideración será que las líneas de inducción en la película de aire próxima al hierro deben ser normales al hierro, como se demuestra en la siguiente ecuación:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} = \frac{\mu_{r1}}{\infty} = 0 \quad (3.12)$$

Volviendo a la teoría del método de las imágenes, en este caso de permeabilidad infinita, para reducir el problema con dos medios materiales a un problema equivalente con un solo medio material, se sustituye el hierro por una distribución de corriente imagen en la zona externa a la ventana del transformador. De esta forma, por simetría, las líneas de inducción son perpendiculares al recinto de aire y a su imagen especular.

Así las corrientes imagen se encargan de magnetizar la zona especular, con lo que las corrientes reales sólo deben encargarse de magnetizar la ventana del transformador, como ocurre en el caso real de existir dos medios materiales y uno de ellos con $\mu = \infty$.

Para un caso real, en el cual el hierro tendrá una permeabilidad muy alta pero no infinita, ni el campo magnético es nulo en el hierro ni las líneas de campo serán normales a la superficie de separación de ambos medios. En este caso existe relación entre los campos magnéticos la cual dependerá de la permeabilidad de cada medio y el ángulo que forman las líneas de campo con la normal ya no es nulo. De esta forma las corrientes de la imagen no serán idénticas a las del conductor real, sino que las condiciones de frontera entre ambos medios se verificarán con una intensidad descrita a continuación:

$$I_{imagen} = I \frac{\mu_{Fe} - 1}{\mu_{Fe} + 1} \quad (3.13)$$

Donde:

μ_{Fe} es la permeabilidad del hierro.

Este método es aproximado, por lo que los resultados pueden diferir notablemente de la realidad. Para obtener mejores resultados se toma más de una imagen. En general, con 3 ó 4 imágenes los resultados son muy satisfactorios.

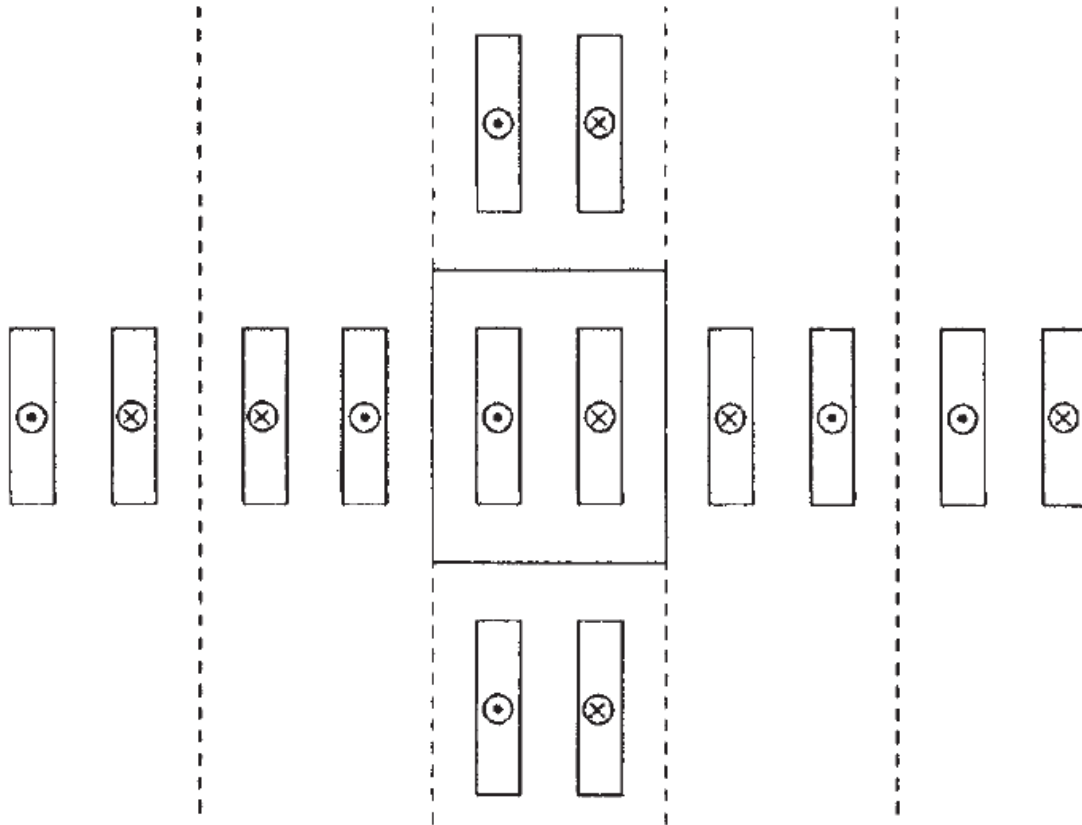


Figura 3.1. Técnica para el método de las imágenes. [2]

Este método no es adecuado para el cálculo del flujo que circula por la cuba del transformador, ya que en dicho cálculo no se dan las condiciones de simetría requeridas para usarlo.

3.2.2. MÉTODO DE ROTH

El método de análisis de campo por doble serie de Fourier originalmente propuesto por Roth, [2], se utiliza para calcular la reactancia de dispersión de la distribución irregular de las bobinas. Este método es empleado normalmente para el cálculo de las componentes de la inducción en coordenadas cartesianas. En un transformador con arrollamientos concéntricos las bobinas son circulares y se debería expresar el vector A en coordenadas cilíndricas; sin embargo, la expresión del rotacional de A en coordenadas cilíndricas es relativamente compleja y haría más complicada la resolución de la ecuación (3.9).

La gran ventaja de este método respecto a los anteriores es su posible aplicación tanto a distribuciones de corriente uniformes como no uniformes en las bobinas. La disposición de las bobinas puede ser totalmente arbitraria, pero divisible en supuestos bloques rectangulares, de tal modo que cada bloque tiene una densidad de corriente considerada uniforme dentro de sí mismo. La distribución de la densidad de corriente, así como la distribución de flujo varían armónicamente a lo largo de ambos ejes, x e y.

El método utiliza un principio similar al del Método de las Imágenes, pues para cada armónico el máximo se produce en los planos ficticios donde el reflejo se hace para simular el efecto del límite del hierro. Los voltamperios reactivos se calculan en términos de estos armónicos de corriente para una profundidad en la dirección z. Los voltamperios totales se calculan multiplicando el valor obtenido por el perímetro. En caso de precisar el valor por unidad de la reactancia se divide por los voltamperios base.

Por otro lado, suponiendo que la curvatura de los arrollamientos es tan grande que un determinado tramo de arrollamiento se puede suponer rectilíneo se consiguen simplificar en cierto modo los cálculos. Para estas circunstancias se pueden utilizar coordenadas cartesianas, como se desarrolla a continuación:

$$\vec{J} = J_z \vec{k} \quad (3.14)$$

Donde:

\vec{J} es el vector densidad de corriente medido en A/m².

Teniendo en cuenta que el problema en estudio es un problema plano, el potencial vector A tiene sólo componente z.

$$\vec{A} = A_z \vec{k} \quad (3.15)$$

Introduciendo estas las ecuaciones (3.14) y (3.15) en la ecuación (3.9) resulta:

$$\frac{\partial A_z^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_z^2}{\partial y^2} = \mu_0 J_z \quad (3.16)$$

La sección recta de cada uno de los arrollamientos es un rectángulo. La densidad de amperios-vuelta en cada uno de los arrollamientos es constante y su valor puede hallarse con la siguiente igualdad:

$$\delta = \frac{N_i I_i}{(x_{2i} - x_{1i})(y_{2i} - y_{1i})} \quad (3.17)$$

Para poder trabajar con esta densidad de corriente en una ecuación diferencial es útil expresarla como una doble serie de Fourier, ya que de esta forma se puede tratar matemáticamente la densidad de corriente de una forma más eficiente (por ejemplo, obtener la derivada de una senoide es sencillo, mientras que en una función escalón no lo es). La densidad de corriente quedaría de la siguiente forma:

$$\delta_i = \sum \sum D_{hk} \cdot \cos(\pi h n \frac{x}{L} + \phi_h) \cdot \cos(\pi k n \frac{y}{L} + \phi_k) \quad (3.18)$$

Siendo δ_i la densidad de corriente del arrollamiento en estudio.

Esta expresión de la densidad de corriente hace uso de la teoría de las imágenes, expuesta en el apartado anterior, considerando $\mu = \infty$, ya que el desarrollo en serie de Fourier admite que la función desarrollada es periódica, de periodo L en sentido horizontal y H en sentido vertical.

Para obtener una precisión razonable, para este caso el número de armónicos para dos series de Fourier debe ser al menos igual a 20 cuando la distribución de amperios sea idéntica en las bobinas de baja tensión y de alta tensión.

Teniendo en cuenta que el aspecto de la densidad de corriente es el mostrado en la ecuación (3.18), la solución a la ecuación diferencial (3.16) puede ser escrita de la siguiente manera:

$$A = \sum_k \sum_i a_{ik} \cdot \cos(m_i x) \cdot \cos(n_k y) \quad (3.19)$$

La ecuación (3.19) puede ser introducida en la ecuación (3.16). De tal modo que, una vez conseguido el valor de A, se obtienen las componentes x e y de la inducción magnética utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A}{\partial y} \\ B_y &= \frac{\partial A}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.20)$$

El Método de Roth está basado en el Método de las Imágenes, por lo que tampoco es válido para el cálculo del flujo en la cuba de un transformador.

3.2.3. MÉTODO DE RABINS

Otro método expuesto en [2] es el Método de Rabins, el cual considera que en un transformador los arrollamientos tienen curvatura. Cada columna de un transformador está compuesta por un núcleo con bobinas alrededor que se suponen simétricas axialmente. A priori se puede considerar la columna de longitud infinita, despreciando asimismo las paredes del tanque o estructuras de sujeción en ella. Además, el núcleo se supone infinitamente permeable.

Las simplificaciones anteriormente descritas son necesarias para poder resolver las ecuaciones de Maxwell en coordenadas cilíndricas.

$$\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} = -\mu\delta \quad (3.21)$$

La solución de la ecuación (3.21) es una suma de funciones de Bessel y funciones de Struve.

Para obtener una aproximación razonable, el número de armónicos de la densidad de corriente debe ser al menos 70, como se muestra en la figura (3.2).

La figura 3.2 muestra los diagramas de densidad de flujo normal a lo largo de la altura de la bobina de un transformador con una distribución uniforme de amperios-vueltas en las bobinas de baja y alta tensión. Con el incremento del número de armónicos de la densidad de corriente la variación de la densidad de flujo normal se vuelve lisa, lo que indica una mayor precisión de los cálculos de las magnitudes.

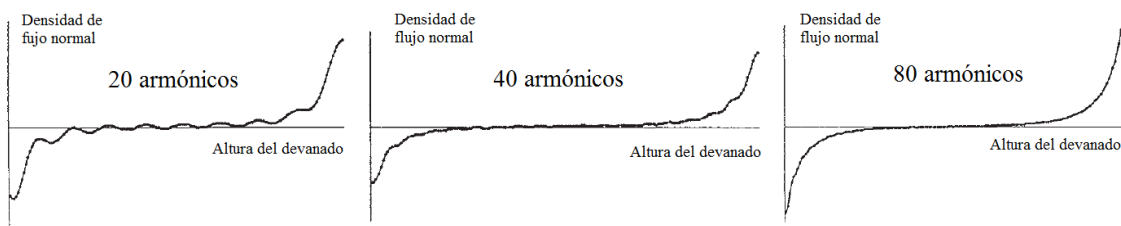


Figura 3.2. Aumento de precisión en el cálculo de la densidad de flujo normal conforme incrementa el número de armónicos.

Este método es especialmente útil para el cálculo del campo magnético cerca de las bobinas, de modo que es necesario que los valores de inductancias y fuerzas que dependen de este campo estén calculados con exactitud, para que no se produzcan errores.

Para el cálculo del campo magnético en las inmediaciones de las bobinas, el Método de Rabins da una solución muy exacta a pesar de las simplificaciones anteriormente mencionadas. Así, las fuerzas e inductancias que dependen en gran medida del campo producido cerca de las bobinas, se pueden obtener con una gran precisión. Esto puede ser demostrado mediante comparación directa con una solución de elementos finitos aplicados a la geometría más compleja, incluyendo la pared del tanque y las abrazaderas.

La posibilidad de obtener pérdidas en las partes estructurales provoca que el Método de Rabins no sea apropiado para ello. Sin embargo, debido a que el campo magnético cerca o dentro de las bobinas se obtiene con precisión, las pérdidas por corrientes de Foucault, así como su distribución espacial, pueden ser obtenidas con precisión a partir de fórmulas basadas en este campo de fuga.

Este método desprecia la existencia de la cuba, por lo que no puede ser utilizado para el cálculo del flujo que circula por la misma.

3.3. MÉTODO DE LAS REDES DE RELUCTANCIA

El Método de las Redes de Reluctancia equivalentes es uno de los métodos más antiguos para el cálculo y modelado de circuitos magnéticos, tanto en máquinas eléctricas como en transformadores, [2]. Aplicando esta técnica se consigue convertir un sistema inicialmente complejo en un sistema de reluctancias formado por multitud de nodos con la facilidad de poder resolverse de forma algebraica. El método se basa en la ley de Ohm para circuitos magnéticos y en las leyes de Kirchhoff.

Los principales beneficios que conlleva el uso de este método frente al resto de técnicas, comentadas en este documento, son principalmente el ahorro de esfuerzo y tiempo de procesado del ordenador para la resolución del circuito en cuestión debido al nuevo sistema, más sencillo y eficaz, siendo sólo necesarias la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff para su resolución.

Cabe destacar la complicación que acontece a la hora de modelar el circuito eléctrico cerca de cuerpos metálicos, como por ejemplo el hierro, dada su característica magnética no lineal. Para tener en cuenta este aspecto algunos autores introducen reluctancias variables en el circuito equivalente.

Además de lo anterior, el método se complica cuando existen elementos metálicos por los que circulan corrientes de Foucault que alteran la distribución espacial del flujo. Para tener en cuenta este aspecto algunos autores introducen reluctancias complejas en el circuito equivalente.

El método de las redes de reluctancia equivalentes (RNM) ha sido desarrollado por numerosos autores de forma paralela. En 1966 Davey y King redactaron una serie de artículos sobre este método, y en 1975 el trabajo de Djurovic, Carpenter y Monson contribuyó de manera significativa a esta teoría. Caben destacar las aportaciones de King y Carpenter, el primero demostrando que el Método de las Diferencias Finitas y el RNM eran equivalentes, y el segundo por encontrar equivalencias con el Método de los Elementos Finitos. Con estas demostraciones se podía considerar al RNM como un método alternativo en este tipo de cálculos, además Carpenter confirmó el uso informático de este método, y sus ventajas respecto a los demás, usando como ejemplo un transformador. Otro de los autores que contribuyó decisivamente al desarrollo de las redes de reluctancia es J. Turowski, quien utilizó el método para el cálculo de las pérdidas en la cuba y otras pérdidas debidas al flujo disperso [7].

Normalmente este tipo de software se crea con la capacidad de poder implementarse para aparatos cada vez más y más complejos, llegando un punto en el que el software de cálculo de pérdidas requiere demasiada capacidad y tiempo de los ordenadores disponibles, lo cual es contraproducente para cualquier ingeniero o empresa por el dinero que esto supone, o no están justificados porque precisarían un ordenador excesivamente potente para realizar dicho cálculo.

Como se explica en [8], el método de las redes de reluctancia equivalentes se basa en dividir un recinto complejo en multitud de celdas. En cada una de estas celdas actúa una fuerza magnetomotriz y existe una reluctancia que se opone al paso del flujo según el eje x y otra reluctancia que se opone al paso del flujo según el eje y (supuesto el problema en estudio plano). El modelo de esa celda elemental se muestra en la figura 3.3.

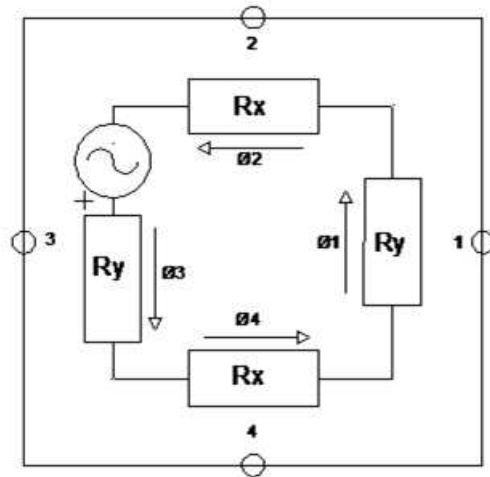


Figura 3.3. Esquema eléctrico de una celda elemental para el método de las redes de reluctancia. [8]

Lo visto hasta aquí es sencillo de aplicar mientras se trate de una celda única o de varios elementos sin ninguna relación entre sí. Sin embargo, en un recinto complejo esta teoría se complica bastante, ya que cada reluctancia pertenece a las dos celdas colindantes, por lo que se deben tener en cuenta los tres factores siguientes para su resolución:

- Fuentes de tensión en la rama común a dos celdas.
- Reluctancia de la rama común a dos celdas contiguas.
- Flujo que circula por la rama común a dos celdas contiguas.

Una vez dividido el recinto en celdas y modelada cada celda por su fuerza magnetomotriz y su reluctancia, se resuelve el sistema mediante análisis por mallas o análisis por nudos para obtener el flujo y la inducción en diferentes partes del circuito magnético.

Este método sí que ha sido utilizado por algunos autores para el cálculo del flujo por la cuba, como se indicará en la revisión bibliográfica del apartado 3.5.

3.4. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El Método de los Elementos Finitos, denominado habitualmente en su forma abreviada FEM (Finite Element Method), es el método de cálculo numérico más utilizado por su sencillez de uso, que permite que un usuario obtenga resultados válidos sin necesidad de una formación excesivamente larga y compleja, [9]. En la actualidad existen muchas herramientas comerciales de elementos finitos que liberan al usuario de enfrentarse con los fundamentos físicos del método.

El Método de los Elementos Finitos permite estudiar diferentes tipos de problemas físicos (de transmisión de calor, de mecánica, electromagnéticos, etc.), incluso problemas en los que existe un acoplamiento entre los diferentes problemas físicos (por ejemplo una resistencia variable con la temperatura).

El Método de los Elementos Finitos es especialmente útil para configuraciones asimétricas y excitaciones no uniformes, permitiendo resolver las ecuaciones diferenciales asociadas a un problema físico sobre geometrías complicadas.

La principal ventaja de este método es su amplio campo de aplicación, ya que puede ser usado para cualquier figura geométrica por complicada que sea, tanto en dos dimensiones como en tres, teniendo en cuenta las discontinuidades en las propiedades del material de forma sencilla.

Debido a esto, el Método de los Elementos Finitos ha adquirido una gran importancia en la solución de problemas de ingeniería, físicos, etc., ya que permite resolver casos que hasta hace poco tiempo eran prácticamente imposibles de resolver por métodos matemáticos tradicionales.

Esta circunstancia obligaba a realizar prototipos, ensayarlos e ir realizando mejoras de forma iterativa, lo que traía consigo un elevado coste tanto económico como en tiempo de desarrollo.

El FEM permite realizar un modelo matemático de cálculo del sistema real, más fácil y económico de modificar que un prototipo. Sin embargo no deja de ser un método aproximado de cálculo debido a las hipótesis básicas del método. Los prototipos, por lo tanto, siguen siendo necesarios, pero en menor número, ya que el primer ensayo puede acercarse bastante más al diseño óptimo.

Dado que en este Proyecto Fin de Carrera se utiliza el Método de los Elementos Finitos, esta técnica se expondrá con mayor detenimiento en el próximo capítulo.

El Método de los Elementos Finitos como formulación matemática es relativamente nuevo, aunque su estructura básica es conocida desde hace bastante tiempo, en los últimos años ha sufrido un gran desarrollo debido a los avances informáticos.

El Método de Elementos Finitos fue en principio desarrollado en 1943 por R. Courant, quien utilizó el método de Ritz de análisis numérico y minimización de las variables de cálculo para obtener soluciones aproximadas a un sistema de vibración. Poco después, un documento publicado en 1956 por M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, y L. J. Topp estableció una definición más amplia del análisis numérico.

Con la llegada de los centros de cálculo y los primeros programas comerciales en los años 60, el FEM a la vez que se populariza en la industria refuerza sus bases teóricas en los centros universitarios.

En los años 70 se produce un gran crecimiento de la bibliografía así como la extensión del método a otros problemas como los no lineales. En esta década, el FEM estaba limitado a caros ordenadores centrales generalmente poseídos por las industrias aeronáuticas, de automoción, de defensa y nucleares. Se estudian nuevos tipos de elementos y se sientan las bases matemáticas rigurosas del método, que había aparecido antes más como técnica de la ingeniería que como método numérico de la matemática.

A partir de la década de los 80, con la generalización de los ordenadores personales, se extiende el uso de los programas comerciales que se especializan en los diversos campos, instaurándose el uso de preprocesadores y postprocesadores gráficos que realizan el mallado y la representación gráfica de los resultados.

En la actualidad, dentro del campo estructural, el FEM comparte protagonismo con el método matricial, siendo muchos los programas que mezclan el análisis por ambos métodos, debido sobre todo a la mayor necesidad de memoria que requiere el análisis por elementos finitos. Así se ha dejado la aplicación del FEM para el análisis de elementos continuos. Y desde el rápido declive en el coste de los ordenadores y el fenomenal incremento en la potencia de cálculo, el FEM ha desarrollado una increíble precisión. A día de hoy, los superordenadores son capaces de dar resultados exactos para todo tipo de parámetros.

La forma de proceder para abordar un problema mediante este método consiste en dividir la geometría del cuerpo en elementos infinitesimales, de tal modo que, asumiendo constantes la densidad de flujo en cada uno de estos elementos infinitesimales, el potencial vector magnético pueda considerarse lineal.

El desarrollo de un algoritmo de elementos finitos para resolver un problema definido mediante ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno requiere, en general, las siguientes etapas:

- El caso de estudio ha de definirse geométricamente en las dimensiones que se desea trabajar, ya sean dichas dimensiones dos o tres, delimitando la región del espacio donde se quiere realizar el método.

- El conjunto del espacio definido anteriormente se divide en pequeñas porciones de geometría triangular. A esta partición del dominio también se la denomina discretización. Cabe destacar que cuanto menores dimensiones tengan los elementos mayores precisiones se consiguen, lo cual sería interesante para las zonas de mayor interés o de mayor complejidad de cálculo. Sin embargo, al realizar particiones más pequeñas el tiempo de cálculo del sistema aumenta de manera considerable, con lo que se deben hacer divisiones del espacio teniendo en cuenta las preferencias entre precisión requerida y tiempo necesario. La figura 3.5 muestra un área circular vacía dentro de un cuadrado, constituyendo un buen ejemplo de mallado para una figura, viendo en la esquina superior un mallado más refinado que en el resto. Este ejemplo está diseñado en dos dimensiones, pero sirve tanto para una dimensión (dividiendo una recta en secciones, figura 3.4), como para tres dimensiones.

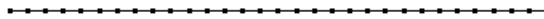


Figura 3.4. Seccionado de una recta unidimensional para la utilización del método de elementos finitos.

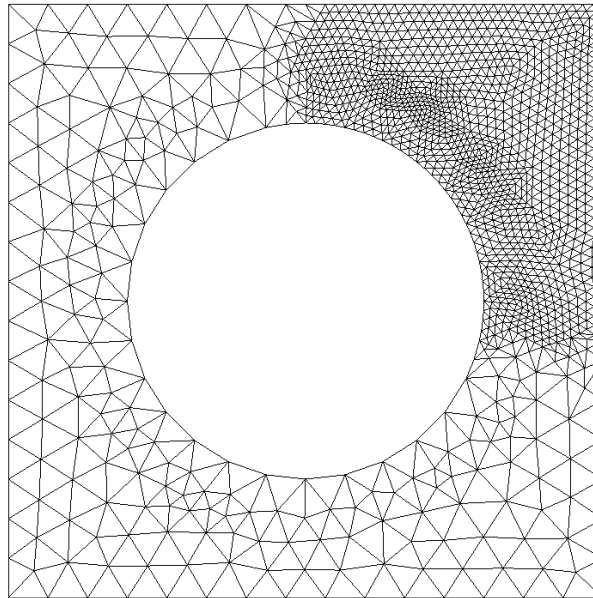


Figura 3.5. Mallado de una figura bidimensional para la utilización del Método de Elementos Finitos.

-Se especifican las propiedades de los distintos materiales que forman todo el espacio de estudio, definiendo sus características, así como sus constantes y los valores de los parámetros necesarios para el cálculo.

-Se deben definir las condiciones de frontera para los límites del espacio en el caso de estudio, acentuando si existe alguna condición sobre el valor de la magnitud de estudio o sobre su derivada en dichas regiones frontera.

-Las ecuaciones que gobiernan el fenómeno en estudio para cada uno de los elementos en que se ha dividido el problema deben plantearse de forma matricial. Seguidamente se aplicarán las condiciones de frontera definidas anteriormente, de forma que resolviendo algebraicamente las ecuaciones planteadas se obtenga como solución el valor de la magnitud en estudio en cada punto de la región geométrica definida. Cada valor obtenido no opera de manera individual, sino que debe tener en cuenta los valores de los diferentes elementos finitos que también forman parte del estudio.

La discretización en elementos finitos ayuda a construir un algoritmo de proyección sencillo, logrando además que la solución por el Método de Elementos Finitos sea generalmente exacta en un conjunto finito de puntos. Estos puntos coinciden usualmente con los vértices de los elementos finitos o puntos destacados de los mismos.

Existen paquetes de software que permiten analizar problemas en dos y tres dimensiones mediante este método. Sin embargo el modelado tridimensional de un problema requiere mucho tiempo y esfuerzo, por lo que en ocasiones se prefiere modelar en dos dimensiones teniendo en cuenta la tercera dimensión de forma estimada.

En el siguiente capítulo de este mismo documento se profundiza en este método, para posteriormente ahondar en un caso práctico con la ayuda de un software auxiliar.

Este método sí ha sido utilizado por algunos autores para el cálculo del flujo por la cuba, como se indica a continuación, en la revisión bibliográfica.

3.5. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA SOBRE CÁLCULO DEL FLUJO EN LA CUBA DE UN TRANSFORMADOR

Los principales artículos técnicos publicados sobre el cálculo del flujo en la cuba de un transformador son los siguientes:

3.5.1. ALLCOCK ET AL [10]

En este documento se muestra el cálculo de la impedancia de secuencia homopolar para transformadores de potencia mediante métodos numéricos de elementos finitos, ya que no existe una solución analítica precisa para obtener esta impedancia.

El autor alerta sobre el hecho de que una solución utilizando un programa de elementos finitos 2-D no arroja resultados suficientemente precisos. Sin embargo, una solución 3-D es computacionalmente muy costosa (el modelo tendría en torno a 60.000 elementos). Por tanto, el autor utiliza un método bidimensional, pero tiene en cuenta el efecto de las corrientes de Foucault mediante impedancias llamadas *superficiales*.

3.5.2. VALKOVIC ET AL [11]

En este ensayo se calculan pérdidas en el tanque de un transformador trifásico teniendo en cuenta la forma del tanque, la excitación de tres fases, la histéresis y no linealidad. Aunque el método es desarrollado para una determinada geometría del tanque, los principios básicos de este método se pueden aplicar también en el cálculo de las

pérdidas en un tanque de cualquier geometría. Dado que es prácticamente imposible medir con precisión las pérdidas del tanque del transformador debido a que estas pérdidas son sólo una pequeña parte de las pérdidas de carga total, este método descrito no puede ser verificado de forma fiable. Sin embargo, sobre la base de las pérdidas medidas de una serie de transformadores con y sin tanque, se puede concluir que este método es suficientemente preciso ya que las pérdidas del tanque no difieren de las pérdidas calculadas en más de un $\pm 20\%$. Esta precisión es muy buena si se tiene en cuenta la compleja geometría del transformador y la influencia de una serie de factores en la pérdida del tanque que no podrían tenerse en cuenta en el cálculo. El documento también incluye algunos resultados de los cálculos que indican que la disposición de los amperios-vuelta en el bobinado influye considerablemente las pérdidas del tanque.

3.5.3. LOPEZ-FERNANDEZ ET AL [12]

El artículo presenta una solución rápida para el cálculo tridimensional del campo de fuga en los transformadores de potencia tipo Shell de hasta 500 kV. El programa utilizado es conocido como Shell-RNM (3D), apropiado para evaluar las pérdidas parásitas, la optimización de las derivaciones y posición de la pantalla, y la localización de puntos calientes. También permite analizar y concluir un uso óptimo de las pantallas, cambios en la estructura geométrica de materiales no lineales, etc. Una aplicación destacada de Shell-RNM (3D) es su posible uso para evaluar las pérdidas parásitas. También se describe un avance de la configuración para las medidas experimentales llevadas a cabo por medio de fibra óptica. El software RNM presentado en este trabajo es un apoyo importante para el cálculo del campo de fuga en tres dimensiones y para el diseño de transformadores de tipo Shell de potencia. Shell-RNM (3D) promete ser una herramienta rápida y fácil para superar los nuevos retos en un mercado más exigente cada día.

3.5.3. SZABADOS ET AL [13]

Este artículo, inspirado por los intentos de los investigadores de proponer un enfoque analítico al problema de las corrientes de Foucault en las máquinas de inducción, desarrolla un método para demostrar que es factible el uso de un modelo analítico en el análisis de las pérdidas en la pared de la cuba en los transformadores de gran potencia.

Este artículo introduce una nueva técnica para reducir el esfuerzo de cálculo en el análisis de las pérdidas en las paredes del tanque. El método requiere sólo los valores de la densidad del flujo incidente en la superficie de la pared, que puede ser obtenida por medios experimentales. Este método supone que la distribución del flujo incidente se conoce en una cuadrícula (valores de la matriz) en la superficie de una placa rectangular. Las ecuaciones que conducen a la distribución de densidad de flujo dentro de la placa se derivan, para calcular las corrientes de Foucault. En el documento se describe cómo el flujo incidente puede ser representado analíticamente, usando un ajuste de error con una doble serie de Fourier, para producir los valores de las pérdidas en la placa.

3.5.3. POLOUJADOFF ET AL [14]

El documento desarrolla un procedimiento para calcular la densidad de flujo magnético en la pared del tanque de un transformador trifásico. Esta técnica consigue obtener el campo magnético para un problema en tres dimensiones utilizando una solución de dos dimensiones para una sola fase de un transformador trifásico. Dicha técnica ha sido programada en una microcomputadora para encontrar y asignar los valores de la densidad de flujo magnético. Los valores teóricos obtenidos en este proceso se comparan con los valores medidos en la pared del tanque de un transformador real. Los resultados son aproximados, estando dentro de los límites prácticos, lo que sugiere que la técnica es un procedimiento de diseño valioso para el futuro diseño del transformador.

3.5.3. MAILHOT ET AL [15]

En este artículo se presenta un modelo de elementos finitos utilizando las ecuaciones del circuito eléctrico por medio de un software para el cálculo de la reactancia de secuencia de fase cero para transformadores principales de alimentación. Se utiliza un modelo simplificado para evaluar la temperatura más alta que puede aparecer. Los resultados calculados y los obtenidos a partir del ensayo concuerdan de manera satisfactoria.

4. El Método de los Elementos Finitos

En este capítulo se exponen los fundamentos del Método de Elementos Finitos aplicado de forma específica a la resolución de problemas electromagnéticos. En primer lugar se presenta la formulación del problema, seguidamente se muestran las formas de resolverlo y finalmente realizan cuatro clasificaciones de problemas electromagnéticos.

4.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En la actualidad existen gran cantidad de problemas complejos de ingeniería que requieren la aplicación de cálculo numérico avanzado para su solución. Tales problemas pueden ser resueltos con la ayuda de las técnicas computacionales actuales, las cuales han revolucionado la forma en la cual los problemas son analizados.

Técnicas de aproximación como la de los Elementos Finitos (FEM) constituyen un método numérico destinado a resolver mediante ecuaciones matriciales las ecuaciones diferenciales que se plantean en sistemas discretos (estructuras) o continuos (campos). Este método fue propuesto por primera vez en la década de los cuarenta y fue empleado para el diseño de aeronaves. De ahí en adelante fue ampliamente usado en problemas de análisis estructural en donde se requiere identificar y analizar puntos de esfuerzo de materiales sin necesidad de realizar pruebas destructivas. En ingeniería eléctrica el FEM puede ser aplicado a los transformadores, motores, líneas de transmisión y otros componentes magnéticos con el fin de determinar distribuciones de campos magnéticos en puntos o zonas determinadas, [16].

Básicamente se plantean dos técnicas para el análisis con los FEM, el Método Variacional o de Rayleigh-Ritz y el Método de los Residuos Ponderados o de Galerkin.

Para resolver un problema electromagnético se utilizan las ecuaciones de Maxwell [17]:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}\quad (4.1)$$

Donde:

\vec{E} es el vector campo eléctrico en V/m.

\vec{H} es el vector campo magnético medido en A-vuelta/m.

\vec{B} es el vector inducción magnética medido en T .

\vec{J} es el vector densidad de corriente medido en A/m^2 .

t es el tiempo medido en s.

Además de las ecuaciones anteriores, se deben tener en cuenta las ecuaciones que muestran las relaciones causa-efecto del material en estudio:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (4.2)$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad (4.3)$$

Donde:

σ es la conductividad del material medida en $\Omega^{-1}m^{-1}$.

μ_r es la permeabilidad relativa del material.

μ_0 es la permeabilidad del vacío.

Muchos de los problemas en estudio son problemas de dos dimensiones, x e y, en los que la densidad de corriente se admite normal al plano, es decir, en la dirección del eje z.

En estas circunstancias, el problema se simplifica si se admite que el vector inducción magnética proviene de un potencial vector "A" que satisface:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}_x \vec{A} \quad (4.4)$$

Y dado que según la ley de Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{J}_x \frac{\vec{u}_r}{r^2} dV \quad (4.5a)$$

Donde:

\vec{u}_r es un vector unitario que señala la posición del punto P respecto del elemento de corriente.

r es la distancia entre el conductor y el punto del espacio donde se calcula la inducción medida en m.

Después de algunas operaciones de cálculo diferencial y vectorial se llega a:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{r} dV \quad (4.5b)$$

Como se desprende de la ecuación (4.5b), si la densidad de corriente tiene únicamente la dirección z, el vector potencial A sólo podrá tener dirección z. Otra expresión que relaciona A y J se deduce a continuación:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_r \mu_0} \vec{B} \right) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_r \mu_0} \times \vec{A} \right) = \vec{J} \quad (4.6)$$

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_r \mu_0} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 0 & 0 & A_z \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Operando se deduce:

$$\vec{J} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] \vec{a}_z + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \vec{a}_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y \quad (4.8)$$

Como ya se ha explicado antes, la densidad de corriente J sólo tiene componente z, por lo que los dos últimos términos de la expresión son cero, resultando:

$$J = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] \vec{a}_z \quad (4.9)$$

Con todo ello, el problema original de dos dimensiones (x e y) queda reducido a una sola dimensión (z) gracias al vector A, siendo mucho más sencilla la resolución del sistema.

Una vez obtenido A se puede obtener el valor de B mediante la expresión:

$$|B| = B = B_x + B_y = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left(-\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2} \quad (4.10)$$

Teniendo en cuenta:

$$A = A_z(x, y) \quad (4.11)$$

Para resolver la ecuación (4.9) se pueden emplear dos planteamientos, el planteamiento denominado Método Variacional o la Formulación de Galerkin, los cuales se estudian en profundidad a continuación.

Para lo que sigue se imaginará que se tiene un volumen en el espacio de forma cilíndrica (figura 4.1), que está siendo atravesado por una densidad de corriente J inyectada por una fuente externa. Admitiremos que no existe resistencia alguna que se oponga a este paso de corriente, en cuyo caso el campo eléctrico externo que hace que esta corriente circule es nulo. La corriente crea un campo magnético H en dirección tangencial (se trabaja en coordenadas cilíndricas) que será variable en el tiempo si es que la densidad de corriente lo es. Ese campo magnético variable en el tiempo engendra un campo eléctrico E , que discurrirá tangencialmente respecto de una circunferencia perpendicular a la circunferencia descrita por H . El objetivo es hallar estos valores del campo magnético H y del campo eléctrico inducido por este campo magnético, teniendo como dato la corriente inyectada por la fuente.

4.2. MÉTODO VARIACIONAL

El Método Variacional es el más extendido actualmente, parte de la función de energía electromagnética, como se explica en [17]. La energía electromagnética es un escalar ya que no es dependiente de la dirección.

Como veremos seguidamente, la densidad de energía en un volumen del espacio está relacionada con el término:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (4.12)$$

Donde \vec{H} es el campo magnético creado por la corriente inyectada y \vec{E} el campo eléctrico creado por la variación del campo magnético mencionado. El producto vectorial $\vec{E} \times \vec{H}$ es llamado vector de Poynting.

Desarrollando el producto mixto anterior:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad (4.13)$$

Teniendo en cuenta lo siguiente:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (4.15)$$

Donde \vec{J} es la densidad de corriente resultante de sumar la corriente inyectada por la fuente externa y las corrientes inducidas en el material.

La expresión inicial queda:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -(\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) - \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (4.16)$$

Integrando la expresión (4.16) en un volumen (figura 4.1):

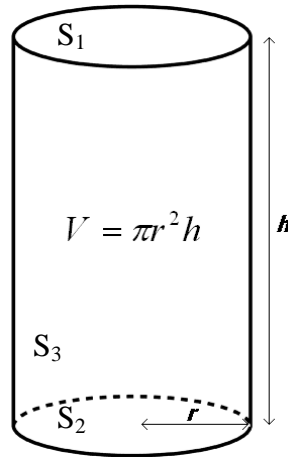


Figura 4.1. Volumen de integración

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV + \iiint_V (\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dV + \iiint_V (\vec{J} \cdot \vec{E}) dV = 0 \quad (4.17a)$$

O bien de la forma:

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} + \iiint_V (\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dV + \iiint_V (\vec{J} \cdot \vec{E}) dV = 0 \quad (4.17b)$$

Esta expresión representa la energía almacenada en el volumen. Cada uno de los tres sumandos se explica a continuación en detalle.

PRIMER TÉRMINO

El primer término de la expresión (4.17b) representa la energía que está entrando o saliendo del volumen. Si se considera que la densidad de corriente inyectada por la fuente externa es perpendicular a las tapas del cilindro, el producto de la \vec{H} creada por dicha densidad de corriente (tangencial) por la \vec{E} creada por la variación de la \vec{H} mencionada (radial) lleva dirección axial, y despreciando la resistencia que se opone al paso de la densidad de corriente inyectada desde la fuente el primer término es nulo.

SEGUNDO TÉRMINO

El segundo término representa la variación en el tiempo de la energía magnética (W_{mag}) en el volumen considerado, ya que se puede demostrar que:

$$\iiint_v (\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dV = \frac{\partial \iiint_v (\int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B}) dV}{\partial t} = \frac{\partial W_{mag}}{\partial t} \quad (4.18)$$

TERCER TÉRMINO

El tercer y último término representa la variación de la energía eléctrica en el tiempo, o potencia eléctrica (P_e), ya que:

$$P_e = \iiint \vec{E} \vec{J} dV \quad (4.19)$$

Pero como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.20)$$

Entonces:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.21)$$

Se puede demostrar lo siguiente:

$$P_e = -\iiint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \vec{J} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint \left(\int_0^A \vec{J} d\vec{A} \right) dV \quad (4.22)$$

De modo que la energía eléctrica (W_e) en el volumen de control es:

$$W_e = -\iiint \left(\int_0^A \vec{J} d\vec{A} \right) dV \quad (4.23)$$

CONCLUSIÓN

La suma de los tres sumandos de la ecuación (4.17b) es nula, y dado que el primer término (la potencia que sale del volumen) es cero, entonces la suma de la variación en el tiempo de la energía magnética y de la variación en el tiempo de la energía eléctrica es nula¹. Si la potencia total es nula eso significa que la energía es mínima. De modo que el Método Variacional se basa en encontrar un valor del campo magnético y del campo eléctrico que hagan mínima la energía. La función de energía (también llamada funcional) se puede expresar en términos del potencial vector y de la densidad de corriente [17].

La densidad de energía en un volumen infinitesimal es:

$$W_e = -\int_0^A \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\int_0^A \vec{J}_f \cdot d\vec{A} \quad (4.24)$$

¹ Significa que la energía eléctrica procede de la energía magnética.

En general la distribución exacta de \vec{J} es desconocida, por lo que es preferible expresar la integral arriba indicada en función de la densidad de corriente libre (o densidad de corriente inyectada \vec{J}_F).

La densidad energía magnética en un volumen infinitesimal es:

$$W_{mag} = \frac{1}{2} \int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B} \quad (4.25)$$

Pero como se cumple:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (4.26)$$

$$\vec{B} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \vec{j} \quad (4.27)$$

La suma de la energía magnética y de la energía eléctrica se puede expresar como:

$$F = \iint_s \left[\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \right)^2 - \vec{J}_f \cdot \vec{A} \right] ds \quad (4.28)$$

De modo que el problema se reduce a obtener el valor del potencial vector \vec{A} que minimice la ecuación (4.28), donde \vec{J}_F es la densidad de carga inyectada. La función F es llamada Energía Funcional o simplemente funcional.

4.2.1. RELACIÓN ENTRE EL POTENCIAL VECTOR EN UN ELEMENTO FINITO Y EL POTENCIAL VECTOR EN LOS VÉRTICES DEL MISMO

Continuando con el planteamiento que se lleva a cabo en [17], si se tiene un triángulo como el mostrado en la figura 4.2, para expresar el valor del potencial vector en cualquier punto del interior del triángulo en función del valor del potencial vector en los tres vértices del mismo, se admite que el potencial vector varía de forma lineal en el espacio.

$$\hat{A} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 x + \vec{C}_3 y \quad (4.29)$$

Donde \vec{C}_1 , \vec{C}_2 y \vec{C}_3 son constantes que deben ser determinadas. Dado que estamos admitiendo que el potencial vector evoluciona de forma lineal, la inducción (que es la derivada del potencial vector) debe ser constante en todo el triángulo.

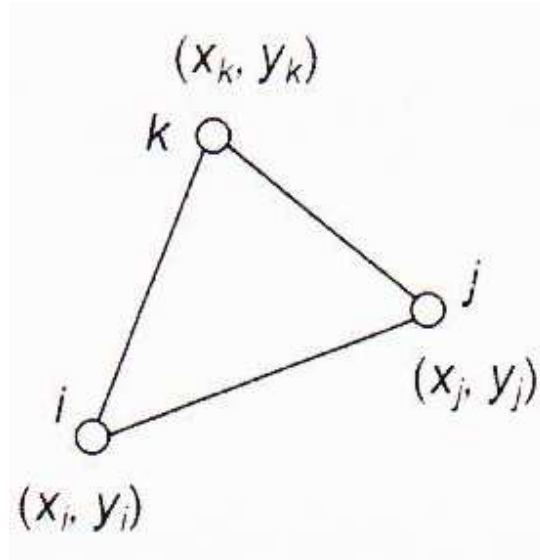


Figura 4.2. Triángulo delimitado para expresar el valor del potencial vector, dependiendo de su valor en los tres vértices. [17]

Para determinar el valor de las constantes, se particulariza la expresión del potencial vector en los diferentes vértices del triángulo:

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= \vec{C}_1 + \vec{C}_2 x_i + \vec{C}_3 y_i \\ \hat{A}_j &= \vec{C}_1 + \vec{C}_2 x_j + \vec{C}_3 y_j \\ \hat{A}_k &= \vec{C}_1 + \vec{C}_2 x_k + \vec{C}_3 y_k \end{aligned} \quad (4.30)$$

Y seguidamente despejamos el valor de las constantes:

$$\vec{C}_1 = \frac{\begin{bmatrix} \hat{A}_i & x_i & y_i \\ \hat{A}_j & x_j & y_j \\ \hat{A}_k & x_k & y_k \end{bmatrix}}{2\Delta} \quad (4.31)$$

$$\vec{C}_2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \hat{A}_i & y_i \\ 1 & \hat{A}_j & y_j \\ 1 & \hat{A}_k & y_k \end{bmatrix}}{2\Delta} \quad (4.32)$$

$$\vec{C}_3 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & x_i & \hat{A}_i \\ 1 & x_j & \hat{A}_j \\ 1 & x_k & \hat{A}_k \end{bmatrix}}{2\Delta} \quad (4.33)$$

Donde Δ es el área del triángulo y vale:

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (4.34)$$

De esta forma, el valor del potencial vector en cualquier punto del triángulo se puede expresar como:

$$\hat{A} = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} \hat{A}_i + \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2\Delta} \hat{A}_j + \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2\Delta} \hat{A}_k \quad (4.35)$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j & a_j &= x_k y_i - x_i y_k & a_k &= x_i y_j - x_j y_i \\ b_i &= y_j - y_k & b_j &= y_k - y_i & b_k &= y_i - y_j \\ c_i &= x_k - x_j & c_j &= x_i - x_k & c_k &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (4.36)$$

O, de forma abreviada:

$$\hat{A} = N_i \hat{A}_i + N_j \hat{A}_j + N_k \hat{A}_k \quad (4.37)$$

Donde N_i , N_j y N_k son los factores de forma que valen la unidad en el nodo considerado.

4.2.2. MINIMIZACIÓN DEL FUNCIONAL

Como se indicó en la ecuación (4.28), la Energía Funcional debe ser mínima dentro de cada elemento, eso permite obtener el valor del potencial vector en cada uno de los vértices del triángulo. Para que la energía sea mínima debe cumplirse:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial A_i} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial A_j} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial A_k} &= 0\end{aligned}\quad (4.38)$$

Derivando la expresión (4.28) respecto de \vec{A}_i , \vec{A}_j y \vec{A}_k resulta:

$$F = \frac{\partial}{\partial \vec{A}_i} \iint_s \left[\frac{1}{\mu} \int \vec{B} d\vec{B} - \vec{J}_f \cdot \vec{A} \right] ds = \iint_s \left[\frac{1}{\mu} \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{A}_i} - \frac{\partial}{\partial \vec{A}_i} \vec{J}_f \cdot \vec{A} \right] ds \quad (4.39)$$

Sustituyendo B en la ecuación anterior por su expresión en función de A (ecuación 4.27), efectuando las derivadas, y sustituyendo el valor de A en cada punto de la superficie en función del valor de A en los vértices del triángulo, después de operar, se llega a lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial A_i} \\ \frac{\partial F}{\partial A_j} \\ \frac{\partial F}{\partial A_k} \end{bmatrix} = \frac{1}{4\Delta^2} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{pmatrix} \iint_s \frac{1}{\mu} ds - \frac{J}{2\Delta} \begin{pmatrix} \iint (a_i + b_i x + c_i y) ds \\ \iint (a_j + b_j x + c_j y) ds \\ \iint (a_k + b_k x + c_k y) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Donde:

$$\begin{aligned}m_{11} &= b_i^2 + c_i^2 \\ m_{12} &= b_j^2 + c_j^2 \\ m_{33} &= b_k^2 + c_k^2\end{aligned}\quad (4.41)$$

$$\begin{aligned}
m_{12} &= m_{21} = b_i b_j + c_i c_j \\
m_{13} &= m_{31} = b_i b_k + c_i c_k \\
m_{23} &= m_{32} = b_j b_k + c_j c_k
\end{aligned} \quad (4.42)$$

Y los valores de $a_{i,j,k}$, $b_{i,j,k}$ y $c_{i,j,k}$ vienen dados por las ecuaciones (4.36).

Realizando las integrales resulta:

$$\frac{1}{4\mu\Delta} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{pmatrix} = \frac{J\Delta}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Por tanto, esta formulación del Método de los Elementos Finitos requiere solucionar, para cada uno de los triángulos en los que se ha descompuesto el problema, la ecuación anterior, que de forma simplificada se puede escribir:

$$[S][A] = \{F\} \quad (4.44)$$

Siendo $[S]$ la matriz de rigidez y $\{F\}$ la matriz de fuerzas. Las incógnitas son los valores del potencial vector en los vértices del triángulo.

4.3. MÉTODO DE GALERKIN

Este método es menos utilizado que el anterior, pese a que sus fundamentos son idénticos, no obstante, como sigue teniendo repercusión en la actualidad, merece ser expuesto en este capítulo.

Un problema típico de condiciones de frontera puede ser el que se define por la siguiente ecuación diferencial, [16]:

$$\zeta \cdot \phi = f \quad (4.45)$$

Donde:

ζ representa el operador diferencial.

f es la excitación o función de fuerza.

ϕ es una variable desconocida.

Se debe resolver con unas condiciones de frontera en la periferia del dominio (Ω) de la función. Se desea entonces resolver la ecuación (4.45) con sus condiciones de frontera de una manera analítica. Sin embargo dichas soluciones analíticas solo pueden ser obtenidas en algunos casos tales como el potencial entre dos placas paralelas infinitas, propagación de ondas por diferentes medios, resonancia en cavidades, etc. Muchos otros problemas del electromagnetismo no tienen una solución analítica directa por lo cual se deben implementar técnicas de aproximación como el Método de Galerkin.

El Método de Galerkin es un método residual en el cual la solución se obtiene ponderando los residuos de la ecuación diferencial. Supóngase que $\tilde{\phi}$ es una solución aproximada de la ecuación (4.45) y sustituyendo $\tilde{\phi}$ por ϕ se tiene que:

$$r = \zeta\tilde{\phi} - f \neq 0 \quad (4.46)$$

Una buena aproximación para $\tilde{\phi}$ debe ser aquella que reduce el residuo r a un valor pequeño para todos los puntos de Ω . El método cumple con la condición siguiente:

$$R_i = \int_{\Omega} w_i r d\Omega = 0 \quad (4.47)$$

Donde:

R_i es la integral del residuo.

w_i es la función de peso escogida.

En el Método de Galerkin la función de pesos es seleccionada para que represente de la forma más exacta la función empleada para la expansión de la solución aproximada, lo cual le da más exactitud a la solución y es la manera más común de emplear la ecuación de los elementos finitos. Por ejemplo si la función de peso es seleccionada de tal forma que $w_i = v_i$ siendo $i=1,2,3\dots N$, según [18] se tiene que:

$$R_i = \int_{\Omega} (v_i \zeta \{v\}^T \{c\} - v_i f) d\Omega = 0 \quad (4.48)$$

En ese caso, los resultados del Método de Galerkin utilizan el mismo sistema de ecuaciones que el Método de Ritz. Además de elegir las funciones de expansión de ponderación, también se pueden elegir otras funciones. Esto da lugar a diferentes formulaciones, como se señala a continuación.

La ecuación (4.48) tiene distinguidas las tres variantes siguientes para su formulación.

Método de Ubicación del Punto

Este método es también conocido en el mundo del electromagnetismo como “Método de Encaje en el Punto”. Se considera que w_i es igual a infinito en ciertos puntos i del espacio, y en el resto del espacio w es igual a cero, como resultado la ecuación (4.46) se convierte en:

$$R_i = [\zeta\{v\}^T \{c\} - f] = 0 \quad (4.49)$$

En el punto i .

De esta forma se satisface la ecuación (4.45) en los puntos específicos. El número de los puntos de coincidencia suele ser elegido para ser igual al número de incógnitas.

Método de Ubicación del Subdominio

En este método las funciones son iguales a la unidad en un subdominio específico y cero en el resto, esto lleva a:

$$R_i = \int_{\Omega_i} (\zeta\{v\}^T \{c\} - f) d\Omega = 0 \quad (4.50)$$

Donde Ω_i denota el subdominio i . Una vez más, el número de los subdominios suele ser elegido para ser igual al número de incógnitas.

Método de los Mínimos Cuadrados

Este método minimiza un nuevo término de error definido por:

$$I = \frac{1}{2} \int_{\Omega} r^2 d\Omega \quad (4.51)$$

La minimización se da respecto a los coeficientes desconocidos en la solución aproximada, lo que equivale a:

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = \int_{\Omega} \zeta \cdot v_i (\zeta \cdot \{v\}^T \{c\} - f) d\Omega = 0 \quad (4.52)$$

Siendo la función en este caso ζv_i .

Estas dos formulaciones, el Método Variacional y el Método Galerkin, son, junto con sus respectivas variaciones, los posibles planteamientos actuales para la resolución de problemas por Elementos Finitos.

4.4. CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Basándose en [17], las principales clasificaciones que se pueden hacer sobre los problemas del campo electromagnético son las siguientes:

- Según su complejidad geométrica (2D y 3D).
- Según el tipo de análisis (estático, armónico o transitorio).
- Según la formulación (vectorial o escalar).
- Según las características del material (lineal, no lineal o anisótropo).

4.4.1. SEGÚN LA GEOMETRÍA

4.4.1.1. DOS DIMENSIONES

Pese a que todos los dispositivos electromagnéticos tienen una estructura real en tres dimensiones, si los planos de dichos dispositivos tienen cierta simetría axial pueden ser modelados en dos dimensiones.

Estos modelos en dos dimensiones utilizan el Método de Elementos Finitos también en dos dimensiones. Dependiendo de la simetría del dispositivo, el modelo puede ser constituido de forma plana o con un enfoque axisimétrico.

La gran ventaja del modelo en 2D es su facilidad para realizarlo y generarlo, ya que requiere menor espacio informático y menor tiempo de cálculo. Resulta muy útil para calcular parámetros específicos, como las pérdidas por corrientes Eddy o esfuerzos en cortocircuitos.

4.4.1.2. TRES DIMENSIONES

Para una representación más natural y realista de los dispositivos electromagnéticos, el modelado en 3D es esencial. Sin embargo, estos modelos son mucho más exigentes en términos computacionales. Por ello se usan formulaciones escalares, reduciendo así la necesidad de un soporte informático más potente.

Se debe tener especial precaución en algunos parámetros, como por ejemplo las condiciones de frontera.

El análisis en 3D de un transformador con estructura en tres fases aximétrica tiene que ser siempre hecho en el sistema cartesiano de coordenadas (x-y-z).

4.4.2. SEGÚN EL TIPO DE ANÁLISIS

4.4.2.1. ELECTROSTÁTICO

Este estudio analiza el campo eléctrico en los sistemas capacitivos o dieléctricos. La variable desconocida es la tensión. Las variables de entrada son las densidades de carga dentro del dominio del problema y las tensiones como condiciones de contorno.

La ecuación diferencial para este tipo de problemas es la siguiente:

$$\varepsilon_x \frac{d^2V}{dx^2} + \varepsilon_y \frac{d^2V}{dy^2} = -\rho_v \quad (4.53)$$

La discretización de dicha ecuación por medio de elementos finitos da como resultado:

$$[K]\{V\} = \{Q\} \quad (4.54)$$

Donde:

K es una matriz cuadrada cuyas entradas dependen de los datos geométricos y de las constantes del material.

V es un vector columna de los potenciales desconocidos.

Q es un vector columna cuyas entradas no nulas son el resultado de las fuentes y condiciones de contorno.

El análisis electrostático se utiliza para calcular el campo eléctrico en el interior del sistema de aislamiento, la capacidad, las fuerzas electrostáticas y pares, etc.

Para los transformadores es parte integrante y esencial de la optimización del aislamiento. Después de determinar el potencial en diversas partes bajo condiciones de prueba estándar, el nivel equivalente de aislamiento puede ser determinado por el análisis de elementos finitos. En la mayoría de los casos los potenciales son conocidos y el problema se reduce a encontrar la distribución de intensidad de campo eléctrico.

4.4.2.2. MAGNETOSTÁTICO

Este tipo de análisis se utiliza para analizar el campo magnético producido por una corriente continua, imanes permanentes, o para campos magnéticos aplicados. El análisis estático se utiliza para calcular parámetros tales como flujo magnético, inductancias propias y mutuas, energías, pares, etc.

La ecuación diferencial para este tipo de problema es la siguiente:

$$\frac{1}{\mu_x} \frac{d^2 \vec{A}}{dx^2} + \frac{1}{\mu_y} \frac{d^2 \vec{A}}{dy^2} = -\vec{J}_o \quad (4.55)$$

La discretización de dicha ecuación por medio de elementos finitos da como resultado:

$$[\vec{K}][\vec{A}] = \{\vec{F}\} \quad (4.56)$$

En transformadores este tipo de análisis se utiliza muy comúnmente para el cálculo de inductancias propias y mutuas, y para fuerzas de cortocircuito.

4.4.2.3. ARMÓNICO EN EL TIEMPO

El análisis armónico en el tiempo se utiliza cuando el dispositivo se alimenta con tensiones o corrientes de excitación que varían sinusoidalmente con una frecuencia específica. Este análisis también se conoce como análisis de corrientes Eddy, en corriente alterna, o análisis armónico. El análisis puede llevarse a cabo en una sola frecuencia o en un rango de frecuencias para calcular las corrientes Eddy, el efecto pelicular y el efecto de proximidad.

La ecuación diferencial para este tipo de problema es la siguiente:

$$\frac{1}{\mu_x} \frac{d^2 \vec{A}}{dx^2} + \frac{1}{\mu_y} \frac{d^2 \vec{A}}{dy^2} = \sigma(\nabla V + j\omega \vec{A}) \quad (4.57)$$

La discretización de dicha ecuación por medio de elementos finitos da como resultado:

$$[K + j\omega S][\vec{A}] = \{\vec{F}\} \quad (4.58)$$

Donde A es el vector columna de valores desconocidos del potencial complejo vector magnético.

Para este tipo de análisis es necesario que no existan materiales con propiedades no lineales.

4.4.2.4. TRANSITORIO

El análisis magnético transitorio es una técnica para el cálculo de campos magnéticos que varían con el tiempo, tales como los causados por aumentos repentinos de tensión, de corriente o de pulsos de campos externos.

La ecuación diferencial para este tipo de problema es la siguiente:

$$\frac{1}{\mu} \frac{d^2 \vec{A}}{dx^2} + \frac{1}{\mu} \frac{d^2 \vec{A}}{dy^2} = \sigma(\nabla V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \quad (4.59)$$

La discretización de dicha ecuación por medio de elementos finitos da como resultado:

$$\left[\bar{K} + \bar{S} \frac{d}{dt} \right] \{\bar{A}\} = \{\bar{F}\} \quad (4.60)$$

Un análisis magnético transitorio puede ser lineal o no lineal. Las técnicas numéricas temporales, como la de Euler, se utilizan comúnmente para la integración del tiempo. Los parámetros de rendimiento tales como las corrientes Eddy y los esfuerzos se pueden calcular de esta forma cuando los transformadores están sometidos a tensiones transitorias.

4.4.3. SEGÚN LAS PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

4.4.3.1. LINEALES Y NO LINEALES

Si las propiedades del material no cambian con la variación del campo, se trata de un problema lineal. En los materiales no lineales, después de un determinado valor del campo, las propiedades de los materiales ya no se mantienen constantes.

Los modelos no lineales son difíciles de resolver de manera computacional. En general, el Método Newton-Raphson se utiliza para linealizar los modelos. Los materiales ferromagnéticos (como los elementos estructurales en los transformadores) presentan histéresis, además de no linealidad, lo cual puede ser abordado mediante un enfoque de permeabilidad elíptica.

4.4.3.2. ISÓTROPOS Y ANISÓTROPOS

La mayoría de los metales son materiales isótropos. Sus propiedades son idénticas en todas las direcciones. Los materiales anisótropos no tienen las mismas propiedades en sus tres direcciones. Los materiales anisótropos están representados por una matriz de tamaño tres por tres. Si el material y los ejes de coordenadas se encuentran en la misma dirección, sólo los elementos de la diagonal principal son distintos de cero en la matriz.

4.4.4. SEGÚN LA FORMULACIÓN

4.4.4.1. POTENCIAL VECTOR MAGNÉTICO (\vec{A})

En el caso de los modelos 2D, la formulación a base de potencial vector magnético es muy utilizada. En la aproximación 2D, la sección transversal es perpendicular a las corrientes. El potencial vector magnético tiene la misma dirección (z) que la corriente que lo produce. Por lo tanto, sólo hay un valor desconocido en cualquier punto dentro del dominio del problema, el cual será la magnitud del potencial vector magnético. En otras palabras, esta formulación da como resultado un vector potencial magnético con un solo grado de libertad (A_z). Una vez que se obtiene la solución, las dos componentes de la densidad de flujo pueden ser determinadas con facilidad.

Sin embargo, en los modelos 3D, esta formulación tiene tres grados de libertad por nodo (A_x , A_y y A_z), por lo que es inadecuado teniendo en cuenta los criterios computacionales en comparación con la formulación potencial escalar. La formulación a partir del potencial magnético puede ser utilizada para el análisis magnetostático, armónico o transitorio. Si hay regiones en el modelo donde puedan circular corrientes parásitas, el potencial escalar eléctrico tiene que ser considerado también.

4.4.4.2. POTENCIAL ESCALAR MAGNÉTICO (Ω)

La formulación con potencial escalar magnético es más adecuada para los problemas magnetostáticos en 3D. La formulación potencial escalar sólo tiene un grado de libertad por nodo. Sin embargo, el potencial escalar no se puede utilizar para las regiones de conducción de corriente y en cualquier parte que rodea a dichas regiones. Aunque esto parece un contratiempo importante, existen medios para evitarlo.

Todo lo expuesto anteriormente, en los primeros cuatro capítulos de esta memoria, resultando meramente teórico, es de gran ayuda para el estudio práctico realizado en el capítulo cinco y sus posteriores conclusiones en el capítulo seis, los cuales se incluyen a continuación.

5. Estudio de un caso real con la ayuda de un programa informático auxiliar

El presente capítulo aborda una aplicación real con su posterior resolución utilizando para ello un programa informático auxiliar. Primero se explica de manera detallada el programa informático de apoyo, definiendo sus utilidades, rango de aplicaciones y soluciones capaces de presentar; seguidamente se clasifica el problema de acuerdo con los criterios descritos en el apartado 4.4. de esta misma memoria; posteriormente se presenta el transformador, incluyendo características magnéticas, composición de materiales y dimensiones; y finalmente se detalla el proceso seguido para la obtención de pérdidas en la cuba de dicho transformador y se exponen los resultados, lo cual es objeto principal de este proyecto.

5.1. COMSOL MULTIPHYSICS

COMSOL Multiphysics (anteriormente conocido como FEMLAB) es un paquete de software de análisis y resolución por el Método de Elementos Finitos para varias aplicaciones físicas y de ingeniería, especialmente fenómenos acoplados, o multifísicos. Mediante el empleo de esta aplicación se reduce de forma considerable el esfuerzo y el tiempo de resolución si se comparan, por el contrario, con los necesarios para realizar los cálculos de forma manual, además de conseguir precisiones mucho mayores, [21].

Este programa es capaz de resolver un sistema con ecuaciones no lineales mediante derivadas parciales utilizando el Método de Elementos Finitos en una, dos y tres dimensiones, y bajo diversas condiciones de simetría en el caso de ser requerido. Se puede responder a los desafíos del electromagnetismo, la elasticidad, líquidos y gases dinámicos, entre otros muchos problemas por complejos que resulten. Como ayuda a los usuarios, incluye muchos modelos resueltos, de diferentes campos de aplicación.

Existen varios módulos de aplicación específicos para COMSOL Multiphysics, algunos de ellos son los siguientes:

- AC/DC Module
- Acoustics Module
- Batteries & Fuel Cells Module
- Chemical Reaction Engineering Module
- Earth Science Module
- Heat Transfer Module
- LiveLink for MATLAB
- Optimization Module

- Plasma Module
- Structural Mechanics Module

Por otro lado, COMSOL también proporciona la oportunidad de resolver el problema en su formulación matemática (en forma de ecuaciones) y física (con la elección de modelos físicos).

COMSOL Multiphysics también ofrece una amplia y bien gestionada interfaz a MATLAB y sus aplicaciones que proporcionan una extensa variedad de posibilidades de programación, preprocesado y postprocesado. También facilita una interfaz similar a COMSOL Script, un intérprete de lenguaje, que incluye más de 600 comandos para los cálculos numéricos y la visualización en el modo en línea de comandos. Permite crear secuencias de instrucciones diferentes (procedimientos escritos en formato de texto), siendo además un programa multiplataforma (Windows, Mac, Linux).

COMSOL fue iniciado en base a los códigos desarrollados por varios estudiantes licenciados de la Universidad Tecnológica Real en Estocolmo, Suecia.

La versión utilizada para este proyecto es:

- Comsol 3.5.0.494

Con fecha de edición:

- 19 de Septiembre del año 2008.

5.2. DESCRIPCIÓN DEL CASO DE ESTUDIO

En este apartado se presenta el transformador real que será objeto de estudio posteriormente. Primero se describe el transformador de forma general, indicando la disposición de sus componentes, posteriormente se ofrecen los valores nominales del transformador, se muestra su geometría por medio de ilustraciones y se describen los materiales que forman cada elemento.

5.2.1. CARACTERÍSTICAS DEL TRANSFORMADOR

El modelo implementado corresponde al de un transformador de distribución monofásico tipo poste de tres columnas, con los arrollamientos rectangulares situados en su columna central de manera concéntrica, con el arrollamiento de baja tensión siendo el más interno y el de alta tensión el arrollamiento externo, con una canal entre ambos.

El núcleo ferromagnético de tres columnas de tipo arrollado se compone de láminas apiladas, para limitar las corrientes Eddy que se producirían en caso contrario.

El arrollamiento de baja tensión está compuesto por capas de un único folio conductor apiladas y separadas entre si por aislamiento sólido. En este bobinado existen dos canales de refrigeración entre capas de 4 milímetros de anchura cada uno.

El arrollamiento de alta tensión esta compuesto por una serie de capas que a su vez están constituidas por multitud de hilos conductores de sección redonda. Cada una de dichas capas también se encuentran separadas por aislamiento sólido. En este bobinado también existe un canal de refrigeración entre capas de 4 milímetros de anchura. En este arrollamiento se encuentran los cambiadores de toma, para modificar los valores de alta tensión.

El aislante líquido que envuelve la parte activa del transformador es aceite dieléctrico, que a su vez también actúa como refrigerante.

Para contener la parte activa del transformador y el aceite se utiliza una cuba cilíndrica.

5.2.1.1. VALORES NOMINALES

Las magnitudes nominales del transformador se encuentran en la tabla 5.1. Algunos de los datos han sido suprimidos por su contenido confidencial, el resto han sido obtenidos de [20].

Tabla 5.1. Valores nominales del transformador.

Valores nominales	
Potencia nominal	15 kVA
Tensión nominal primaria	13200 V
Tensión nominal secundaria	240 V
Frecuencia	60 Hz

La frecuencia a la que trabaja el transformador son 60 hertzios, dado que será utilizado en el continente americano. La frecuencia que se utiliza en la red europea es de 50 hertzios.

La simulación se realiza bajo condición de circulación de corriente nominal en ambos devanados, puesto que es la condición donde las pérdidas por campos de dispersión son mayores.

Las corrientes nominales, teniendo en cuenta que se trata de un transformador monofásico, se calculan a continuación:

$$I_{N1} = \frac{P_N}{V_{N1}} = \frac{15000VA}{13200V} = 1,136A \quad (5.1)$$

Por el arrollamiento primario (alta tensión) circulan 1,136A.

$$I_{N2} = \frac{P_N}{V_{N2}} = \frac{15000VA}{240V} = 62,5A \quad (5.2)$$

Por el arrollamiento secundario (baja tensión) circulan 62,5A.

Los valores anteriores representan corrientes eficaces. Las corrientes de pico son las siguientes:

$$I_{P1} = \sqrt{2} \cdot I_{N1} = 1,607A \quad (5.3)$$

$$I_{P2} = \sqrt{2} \cdot I_{N2} = 88,388A \quad (5.4)$$

5.2.1.2. GEOMETRÍA DEL TRANSFORMADOR

El diseño descrito en el apartado 5.2.1 aparece ilustrado en la figura 5.1 (núcleo ferromagnético) y en la figura 5.2 (arrollamientos). Las medidas no aparecen por ser confidenciales.

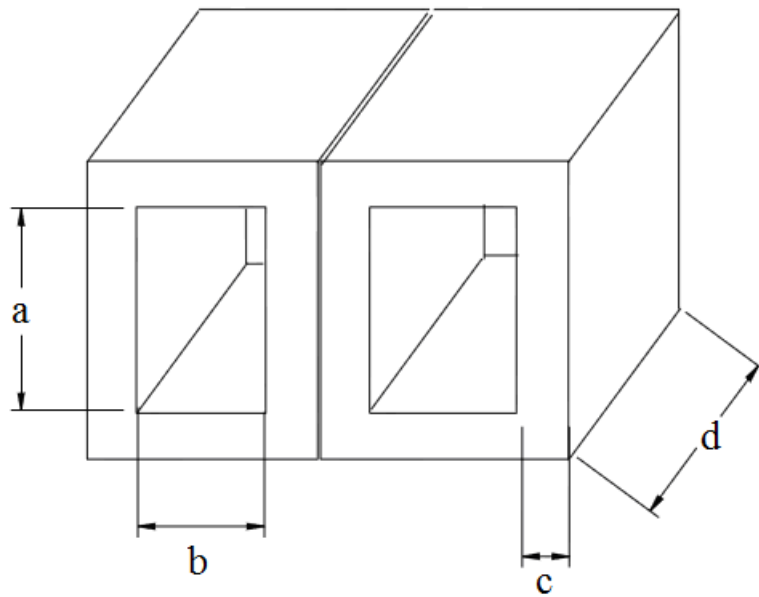


Figura 5.1. Diseño y medidas del núcleo ferromagnético del transformador.

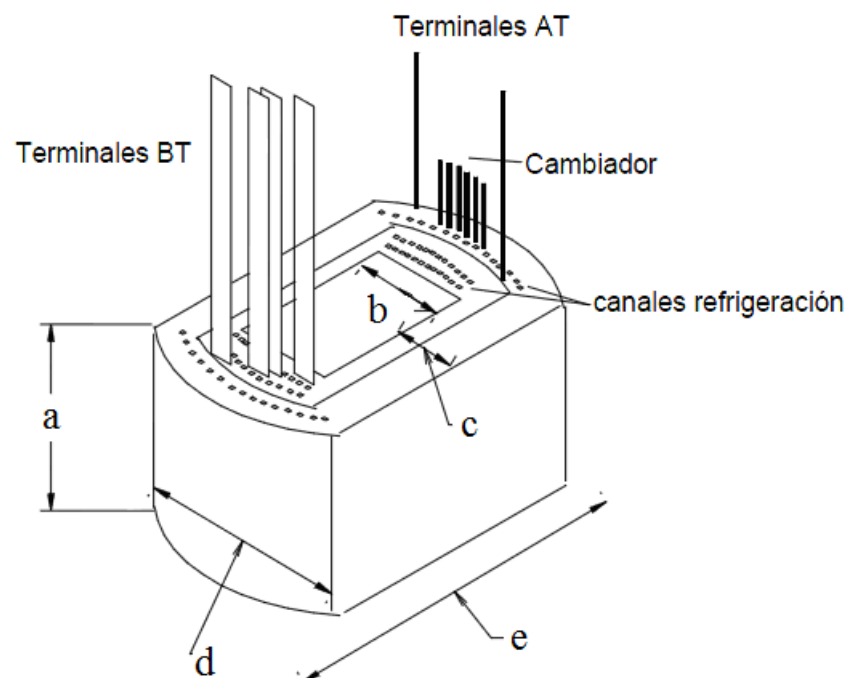


Figura 5.2. Diseño y medidas de los arrollamientos del transformador.

La parte activa del transformador es contenida en un tanque cilíndrico lleno de aceite mineral. Siendo su vista de alzado la ilustrada en la figura 5.3.

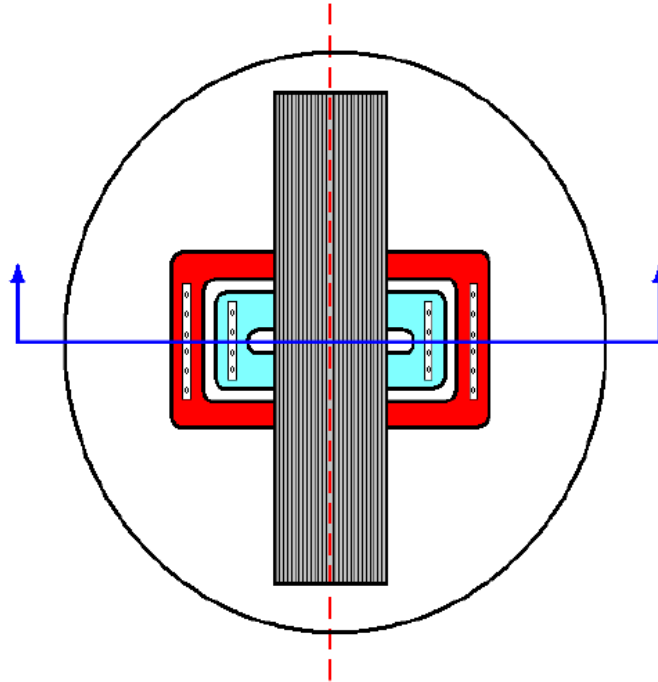


Figura 5.3. Alzado del transformador y de la cuba que lo contiene. [20]

La línea roja discontinua marca por donde se realiza la simetría axial, por su parte la línea continua azul representa por donde se realiza el corte para realizar el modelo en dos dimensiones.

La figura 5.4 muestra los hilos de cobre de la primera capa del bobinado de alta tensión durante su construcción.

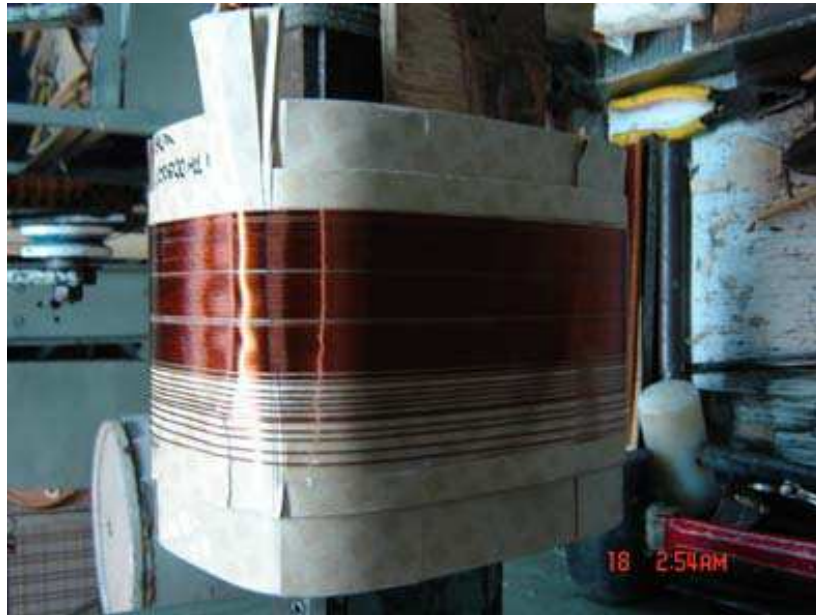


Figura 5.4. Montaje de los hilos de cobre de la primera capa del bobinado de alta tensión.

La figura 5.5 representa el prensado realizado a los bobinados antes de situarlos en la columna central del núcleo magnético.

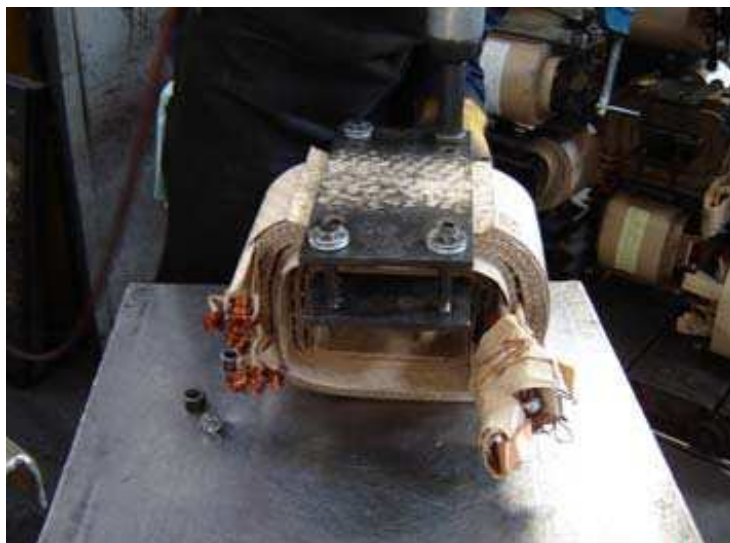


Figura 5.5. Prensado de los arrollamientos.

En la figura 5.6 aparecen los arrollamientos según la vista de alzado que tendrá el transformador finalizado. También aparecen los terminales de los bobinados de alta y baja tensión y los cambiadores de tomas de alta tensión.



Figura 5.6. Vista en alzado de los arrollamientos.

5.2.1.3. MATERIALES

Los materiales que constituyen cada parte del transformador son los siguientes:

El núcleo está hecho con acero laminado de alta permeabilidad.

El arrollamiento de baja tensión se constituye de folios de cobre con recocido blando.

El arrollamiento de alta tensión lo forman hilos de cobre esmaltado de sección circular.

El aislamiento sólido entre espiras es papel diamantado, entre arrollamientos son 12 papeles diamantados apilados, y las refrigeraciones de alta y baja tensión están formadas por fibras de pressboard.

El aceite dieléctrico es del tipo AD-66 Puramin.

Por último, la cuba es de acero A-36, de 4 milímetros de espesor.

5.3. MODELO FEM PARA LA ESTIMACIÓN DE LAS PÉRDIDAS EN LA CUBA DEL TRANSFORMADOR. ESTUDIO DEL TRANSFORMADOR

A continuación se explican las características escogidas según las principales clasificaciones que se pueden hacer sobre los problemas del campo electromagnético. Posteriormente se define como se ha modelado el transformador para realizar el análisis. Todas estas elecciones están debidamente justificadas.

5.3.1. CLASIFICACIÓN DEL MODELO

El modelo se clasifica según una serie de criterios. De acuerdo con el punto 4.4, son cuatro las clasificaciones principales. Por lo expuesto en dicho punto, el caso de estudio se hará con las siguientes características:

- Geometría en dos dimensiones.
- Tipo de análisis: Armónico en el tiempo.
- Propiedades de los materiales: Lineales e isótropas.
- Formulación mediante el potencial vector magnético.

5.3.1.1. GEOMETRÍA EN DOS DIMENSIONES

Debido a la complejidad del modelo en tres dimensiones, se opta realizar el diseño en dos dimensiones considerando un plano transversal, con enfoque axisimétrico, como se detalla más detenidamente en el apartado 5.3.2.

5.3.1.2. TIPO DE ANÁLISIS: ARMÓNICO EN EL TIEMPO

En un transformador la corriente es variable y crea un campo magnético H en dirección tangencial (asumiendo coordenadas cilíndricas). Ese campo magnético variable en el tiempo engendra un campo eléctrico E , que discurrirá tangencialmente respecto a una circunferencia perpendicular a la circunferencia descrita por H . El campo eléctrico

produce unas corrientes inducidas. En este caso de estudio aparecen corrientes inducidas en la cuba que dan lugar a pérdidas de potencia activa, como se verá más adelante.

Teniendo en cuenta la forma de onda sinusoidal de las corrientes que circulan por los arrollamientos de alta y baja tensión del transformador, el tipo de análisis requerido es armónico en el tiempo.

5.3.1.3. PROPIEDADES DE LOS MATERIALES: LINEALES E ISÓTROPAS

Con motivo de simplificar la realización del modelo, y entendiendo que las diferencias en los resultados finales serán mínimas, se decide suponer todos los materiales que componen el transformador serán lineales e isótropos, es decir, con propiedades que no cambian con la variación de la magnitud del campo e iguales en todas las direcciones, respectivamente.

5.3.1.4. FORMULACIÓN MEDIANTE EL POTENCIAL VECTOR MAGNÉTICO

Por lo expuesto en el punto 4.4.4.1, se escoge una formulación de solución mediante el potencial vector magnético puesto que es la más recomendada para modelos realizados en dos dimensiones.

5.3.2. TIPO DE MODELO

Entre todos los modelos que se pueden realizar, en este caso los que mejor se aproximan al modelo real son:

- Modelo en profundidad.
- Modelo acimutal.

El modelo en profundidad supone simetría plana con respecto a un eje en dos dimensiones. En este caso hay que dar profundidad a los distintos elementos, pero surge el problema de que muchos de dichos elementos, como por ejemplo la cuba, no son perpendiculares al plano transversal realizado (la cuba es curvada), las corrientes en realidad tampoco son perpendiculares y no se tiene en cuenta su circulación de manera radial.

El modelo acimutal supone simetría acimutal con respecto a un eje, teniendo en cuenta las consideraciones que el modelo en profundidad no tiene. Por el contrario, se consideran los arrollamientos completamente circulares, y no se pueden representar las otras dos columnas del núcleo que no están envueltas por los arrollamientos.

Para paliar estas contrariedades se tienen en cuenta una serie de consideraciones expuestas en el punto 5.3.2.1, siendo el modelo acimutal el escogido finalmente.

5.3.2.1. MODELO ACIMUTAL

En el problema que se desea resolver se tiene una corriente eléctrica circulando por espiras que se pueden considerar circunferencias (en realidad las diferentes espiras forman una helicoide, pero el considerar esto complica el problema y no presenta ventajas en cuanto a la precisión). Por tanto tenemos un problema con simetría axial.

En primer lugar a la hora de iniciar el modelo, se debe puntualizar qué aplicación de COMSOL se adecua mejor, de las muchas posibles. Basándose en los principios expuestos en [19], y de las condiciones de simetría indicadas en el párrafo precedente se define como dimensión del espacio “*Simetría axial en 2D*” por ser la mas apropiada.

El módulo de COMSOL es “*AC/DC Module*”, el cual se utiliza para simular componentes y dispositivos eléctricos que dependen de fenómenos electrostáticos, magnetostáticos y aplicaciones electromagnéticas cuasiestáticas, particularmente acopladas a otras físicas. Además, consta de interfaces específicas para aplicaciones de maquinaria rotatoria.

Dado que en el problema a resolver las corrientes circulan a lo largo de circunferencias perpendiculares al eje de simetría, se elige un modelo magnetostático, y de todas las posibilidades se escoge “*Corrientes de inducción acimutales, potencial vectorial total*”.

Con todo ello, el programa nos da la siguiente ilustración sobre el modelo escogido:

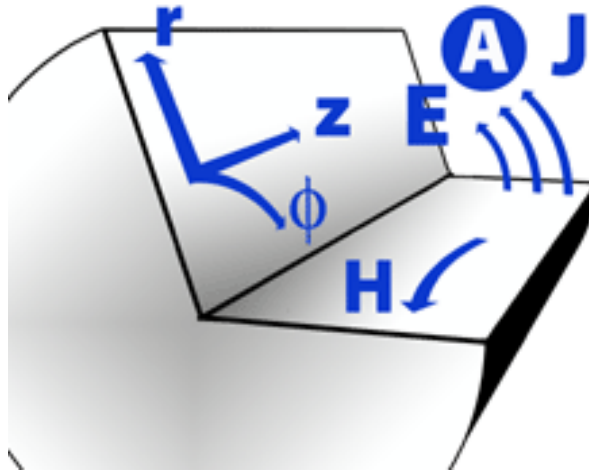


Figura 5.7. Descripción gráfica del modelo de corrientes de inducción acimutales, con potencial vectorial total.

En la figura 5.7:

r es el radio o la distancia al eje de simetría.

z es la altura.

H es el campo magnético en el corte transversal.

E es la fuerza electromotriz engendrada por el flujo magnético.

A es la corriente que circula en la dirección de la simetría de revolución.

J es la densidad de corriente por unidad de área.

Proporcionando la siguiente información:

“Magnetostática de materiales conductores y magnéticos con corrientes eléctricas fluyendo en la dirección angular.”

Para las características de los materiales se utilizarán por defecto las contenidas en la librería de materiales que incluye el programa. La librería de materiales es una base de datos interna de propiedades de materiales. La base de datos contiene dependencias con la temperatura de propiedades eléctricas, térmicas y estructurales de materiales sólidos.

A partir de aquí se puede comenzar a diseñar gráficamente el transformador completo, definiendo las condiciones de los materiales, así como sus condiciones de frontera. Todo ello se aborda en el siguiente punto, referente a la estrategia de modelamiento del transformador.

5.3.3. ESTRATEGIA DE MODELAMIENTO

La estrategia de modelamiento a seguir en este proyecto se basa en detallar el modelo progresivamente, comenzando por un esquema sencillo, para verificar la coherencia del modelo a través de los resultados, y poco a poco aumentar el nivel de detalle, comprobando que los valores teóricos y prácticos coinciden y son los correctos, hasta llegar al modelo final, el cual será el más detallado y del que se mostrarán los resultados, por ser el que más se aproxima al modelo real.

Primer modelo (análisis estático y arrollamientos macizos):

Para el correcto estudio del transformador se consulta continuamente [19], una guía para la utilización de COMSOL Multiphysics.

Por su simetría, sólo se plasma la mitad del modelo. (Ver figura 5.8).

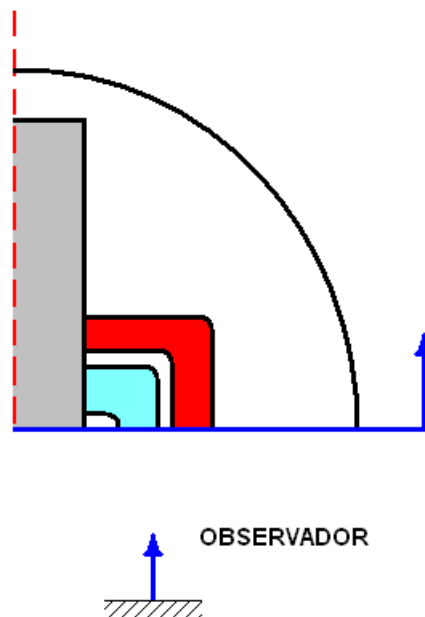


Figura 5.8. Mitad del modelo en vista del observador. [20]

Para simplificar el mallado que debe realizar el programa los arrollamientos se consideran macizos, sin tener en cuenta que en realidad el espacio ocupado por los arrollamientos está compuesto por capas conductoras, capas aislantes y canales de refrigeración. Si no se realiza esta consideración, los tiempos de resolución se alargan enormemente.

Además se realizará el análisis de manera estática, consiguiendo así que los tiempos de resolución se reduzcan aún más y logrando un modelo básico con el que poder ensayar y verificar que se cumplen los resultados que se obtienen de forma teórica.

Segundo modelo (análisis armónico y arrollamientos macizos):

Este análisis tiene la misma geometría que el primer modelo. La diferencia existe en la forma de resolución, que ahora se realizara de manera armónica temporal, definiendo una frecuencia de 60Hz.

Así pueden comprobarse las diferencias con el modelo anterior. Una de las diferencias reside en la aparición de corrientes Eddy en los diferentes elementos del transformador, y más concretamente en la cuba, las cuales producen pérdidas considerables. También aparece efecto pelicular en los conductores.

Tercer modelo (análisis estático y arrollamientos a capas):

Para este modelo se vuelve a un análisis estático, consiguiendo así ensayar con mayor facilidad. Ahora se modelan los arrollamientos a capas y no en bloque como en los dos modelos anteriores. Así se consigue hacer un procesado mucho más detallado, ya que ahora si se tienen en cuenta que zonas son conductoras, aislantes, y canales de refrigeración. Este es el paso previo para realizar el último y definitivo modelo.

Cuarto modelo (análisis armónico y arrollamientos a capas):

Tras los ensayos y verificaciones que ofrecen los tres ensayos anteriores, este modelo está constituido con los arrollamientos a capas y con un análisis armónico definiendo una frecuencia de 60Hz.

Este es el modelo más definido y el que más se aproxima al modelo real, por ello los resultados expuestos en este proyecto se centrarán específicamente en este análisis.

5.3.4. GEOMETRÍA

Las geometrías de los cuatro modelos se pueden agrupar en dos esquemas, dependiendo de si los arrollamientos están constituidos en bloque, o por el contrario a capas.

El núcleo es laminado, pero se modela de forma maciza. Sin embargo, se asume que su conductividad es muy pequeña para que en el resultado no se induzcan grandes corrientes de Eddy, prácticamente inexistentes en el transformador real.

Por su parte, la cuba también se modela de forma maciza pero con una conductividad alta, para poder estimar las corrientes Eddy que en ella se inducen y que darán lugar a pérdidas de potencia activa.

La figura 5.9 muestra el modelado en dos dimensiones con los arrollamientos en bloque, destacando sus partes principales y el eje de simetría axial.

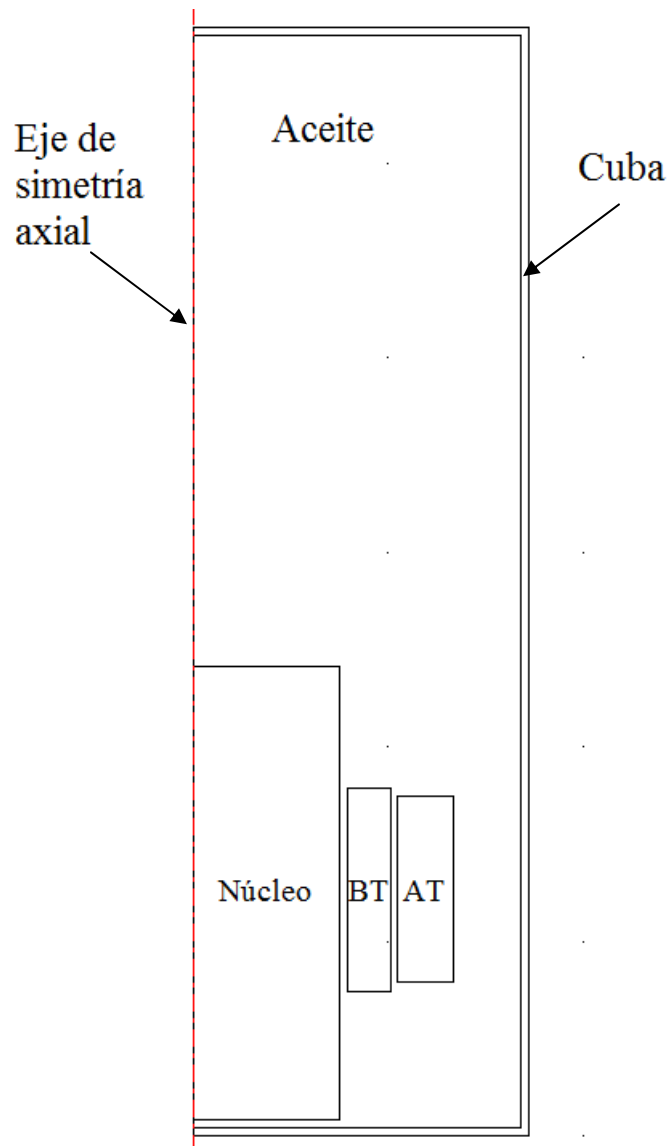


Figura 5.9. Vista frontal del transformador con arrollamientos en bloque considerando simetría axial.

La figura 5.10 muestra el modelado en dos dimensiones con los arrollamientos a capas, destacando sus partes principales y el eje de simetría axial. Se observa que en el arrollamiento de baja tensión hay dos canales de refrigeración, y que en el de alta tensión hay uno. También hay un pequeño espacio entre ambos arrollamientos.

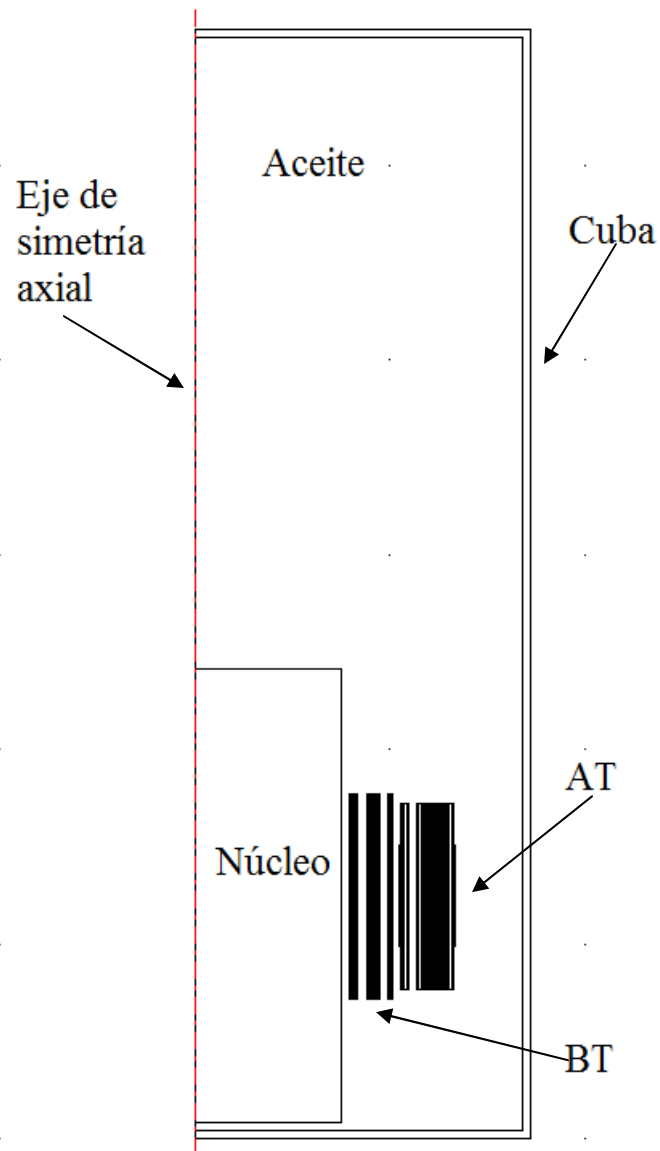


Figura 5.10. Vista frontal del transformador con arrollamientos a capas considerando simetría axial.

Para comprender mejor el modelado realizado para los arrollamientos se expone la figura 5.11, ampliando la zona de los bobinados. La primera y última capa de alta tensión son más pequeñas, dado que tienen menos vueltas de hilo.

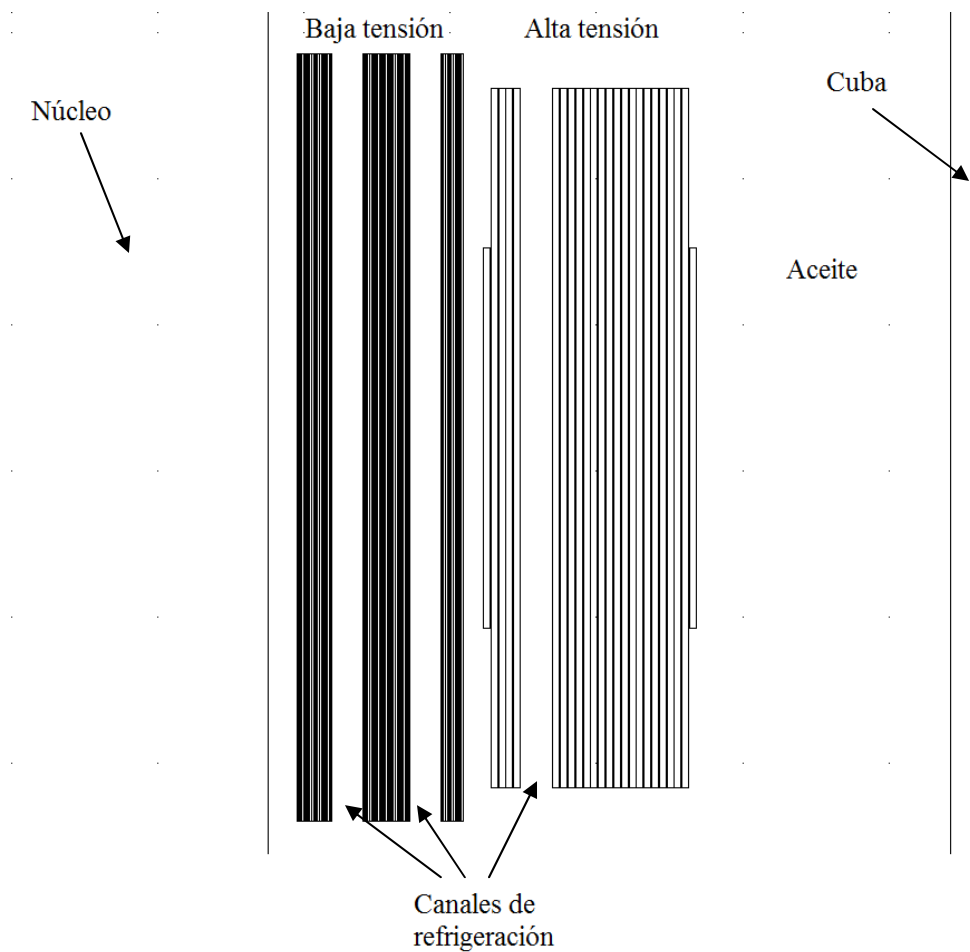


Figura 5.11. Detalle de los arrollamientos del transformador.

En la figura 5.12 aparece la zona superior de las capas de baja tensión, haciéndose visible la diferencia entre parte conductora, parte aislante y parte refrigerante.

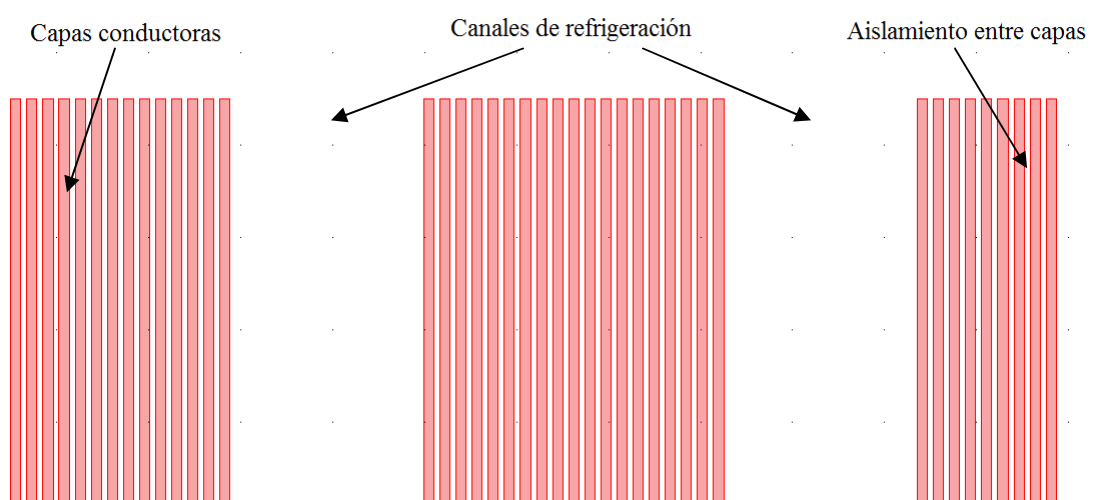


Figura 5.12. Ampliación de la parte superior del bobinado de baja tensión.

Del mismo modo, en la figura 5.13 se realiza una ampliación para el bobinado de alta tensión.

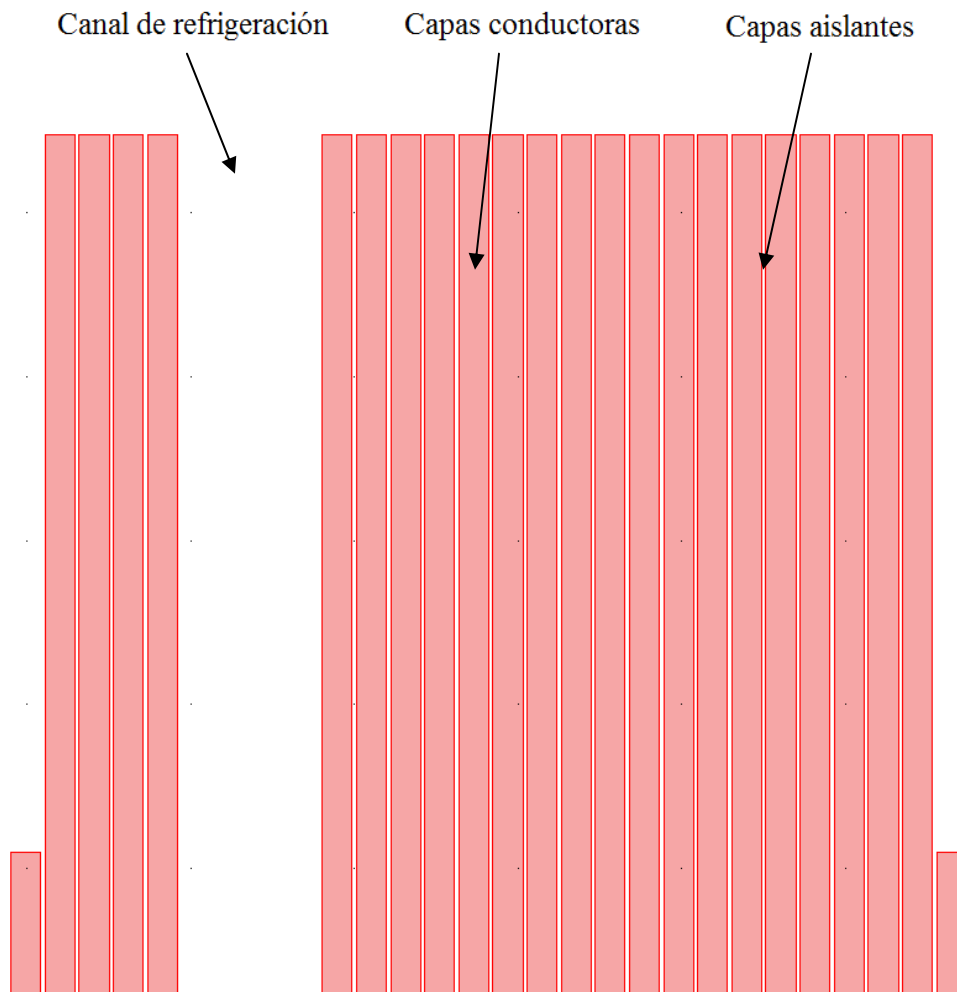


Figura 5.13. Ampliación de la parte superior del bobinado de alta tensión.

Cada una de las capas tiene cierto número de hilos, pero la primera y última capa tienen menos hilos y por tanto su altura es menor. Se ha representado cada capa como un bloque cuya anchura es igual al diámetro de los conductores y la altura igual al diámetro multiplicado por el número de hilos de cada capa. Los pequeños huecos entre conductores del transformador real no se ven reflejados en el modelo (ver figura 5.14), sin embargo esta simplificación es necesaria para que el modelo requiera menos elemento en la discretización y por tanto menos recursos computacionales.

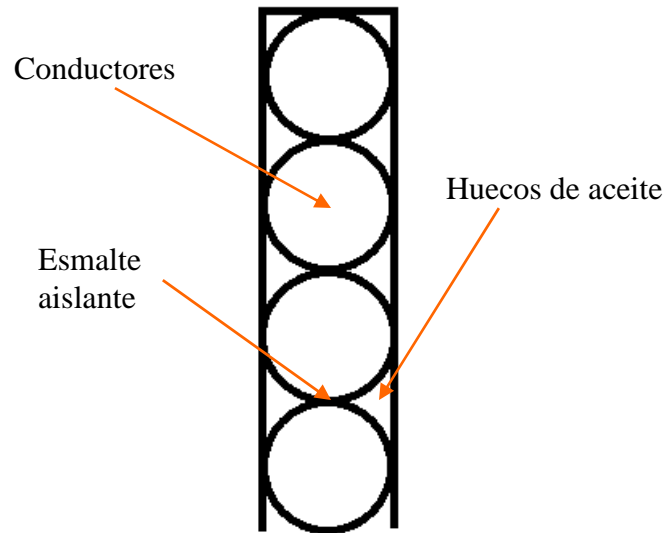


Figura 5.14. Detalle de cada capa del arrollamiento de alta tensión.

Las gráficas que se mostrarán en esta memoria de aquí en adelante referentes a cortes transversales se realizan a la mitad de la altura del núcleo y de los arrollamientos, donde los valores de densidad de flujo magnético son mayores. (Ver figura 5.15).

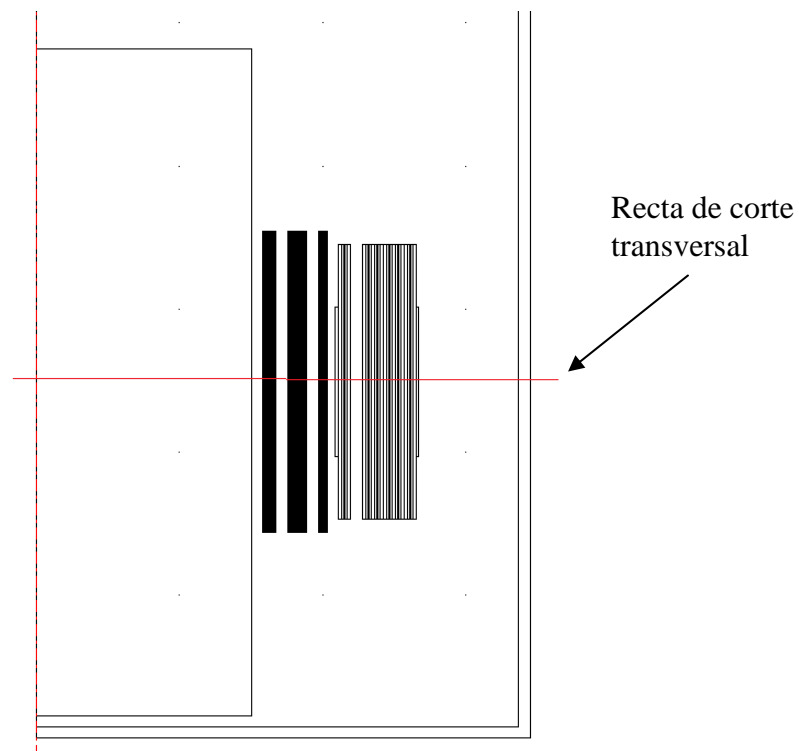


Figura 5.15. Situación de la recta para mostrar resultados realizando un corte transversal.

5.3.5. FUENTES

En este punto se calculan las densidades de corriente de los arrollamientos incluidas en los modelos para cada uno de los cuatro casos. Los cálculos se realizarán de manera directa para no incluir datos confidenciales.

Primer modelo (análisis estático y arrollamientos macizos):

La densidad de corriente para el bobinado de baja tensión es:

$$J_{BT1} = \frac{N \cdot I}{Área} = 1107665,042 \frac{A}{m^2} \quad (5.5)$$

Donde:

N es el número de vueltas de folios de cobre.

I es la corriente de baja tensión, calculada en el punto 5.2.1.1. (62,5A).

$Área$ representa las dimensiones de ancho por alto del bloque que simboliza al arrollamiento en el modelo en m^2 . (Ver figura 5.9).

La densidad de corriente para el bobinado de alta tensión es:

$$J_{AT1} = \frac{N \cdot I}{Área} = -996038 \frac{A}{m^2} \quad (5.6)$$

La densidad de corriente de alta tensión se considera negativa en el plano realizado para el modelo, simulando así que el sentido de la corriente es opuesto al de baja tensión.

El valor de corriente es el calculado en el punto 5.2.1.1. (1,136A).

Segundo modelo (análisis armónico y arrollamientos macizos):

El segundo modelo se asemeja al primero en número de espiras y en área de bobinados, sin embargo la corriente en este caso ha de ser multiplicada por $\sqrt{2}$ al tratarse de análisis armónico. (Después de las comprobaciones teóricas pertinentes se llega a la conclusión de que para este caso la corriente que se ha de introducir a COMSOL es la corriente de pico). Con todo ello, las densidades de corriente para baja y alta tensión son:

$$J_{BT2} = \frac{N \cdot I \cdot \sqrt{2}}{\text{Área}} = 1107665,042 \cdot \sqrt{2} \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = 1566474,925 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad (5.7)$$

$$J_{AT2} = \frac{N \cdot I \cdot \sqrt{2}}{\text{Área}} = -996038 \cdot \sqrt{2} \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = -1408610,448 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad (5.8)$$

Tercer modelo (análisis estático y arrollamientos a capas):

Para este modelo se utiliza la corriente nominal, y el área de cada folio.

La densidad de corriente de cada capa de baja tensión es:

$$J_{BT3} = \frac{I}{\text{Área}_{\text{Folio}}} = 2705627,706 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad (5.9)$$

La densidad de corriente de cada capa de alta tensión es:

$$J_{AT3} = \frac{N_{\text{Capa}} \cdot I}{\text{Área}_{\text{Capa}}} = -1366242,06 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad (5.10)$$

Donde:

A_{Folio} es el área del folio de baja tensión.

N_{Capa} es el número de vueltas de hilo que constituyen cada capa de alta tensión.

$\text{Área}_{\text{Capa}}$ es el área de una capa de alta tensión, cuyo ancho es el diámetro de un hilo, y el alto es la suma de los diámetros de todos los hilos apilados de manera vertical.

Se recuerda que cada capa de alta tensión está compuesta por hilos de cobre esmaltado, pero la primera y última capa tienen menos hilos. El resultado aquí para alta tensión resulta notablemente inferior al de baja tensión, debido a que en el modelo se ha asumido que una capa tiene una anchura igual al diámetro de los hilos, y entre dichos hilos quedan huecos que constituyen zonas no conductoras y hacen que la densidad de corriente de cada capa del modelo resulte menor. (Ver figura 5.14).

Cuarto modelo (análisis armónico y arrollamientos a capas):

Para el último modelo hay que considerar las corrientes de pico por ser un estudio armónico. Las densidades de corriente son:

$$J_{BT4} = \frac{I \cdot \sqrt{2}}{\text{Área}_{\text{Folio}}} = 2705627,706 \cdot \sqrt{2} \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = 3826335,397 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad (5.11)$$

$$J_{AT4} = \frac{N_{\text{Capa}} \cdot I \cdot \sqrt{2}}{\text{Área}_{\text{Capa}}} = -1366242,06 \cdot \sqrt{2} \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = -1932157,051 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad (5.12)$$

Los valores anteriormente calculados son los que se incluirán en el modelado antes de procesarlo, para posteriormente mostrar los resultados.

5.3.6. PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

Con el fin de hacer más sencillos los modelos se suponen unas permeabilidades constantes para los materiales, sin tener en cuenta su saturación.

Las propiedades de los materiales de los modelos con los arrollamientos en bloque son las presentadas en la tabla 5.2.

Tabla 5.2. Características magnéticas y eléctricas de los materiales para los casos con los arrollamientos modelados en bloque.

	Permeabilidad relativa μ_r	Conductividad σ [S/m]
Núcleo	7000	$1,12 \cdot 10^{-7}$
Baja Tensión	1	$5,998 \cdot 10^{-7}$
Alta Tensión	1	$5,998 \cdot 10^{-7}$
Aceite	1	0
Cuba	100	$1,03 \cdot 10^7$

En estos casos, las conductividades de los arrollamientos y del núcleo se han supuesto muy pequeñas, ya que sino aparecen corrientes Eddy muy grandes inexistentes en el núcleo, porque en el transformador real el núcleo es laminado y los arrollamientos son

compuestos de múltiples conductores. Sino, los conductores producirían un efecto pelicular muy importante por lo que se consideran muy resistivos para impedir este efecto.

Por el contrario, la conductividad de la cuba si es alta (valor real del material) porque aquí si se inducen las corrientes que generan las pérdidas objeto del estudio.

En la figura 5.16 se muestra la gráfica de la densidad de corriente total en un corte transversal a la mitad de la altura de los devanados. Se observan corrientes en la parte más externa del núcleo y efecto pelicular en los arrollamientos debidos a las altas conductividades de los materiales.

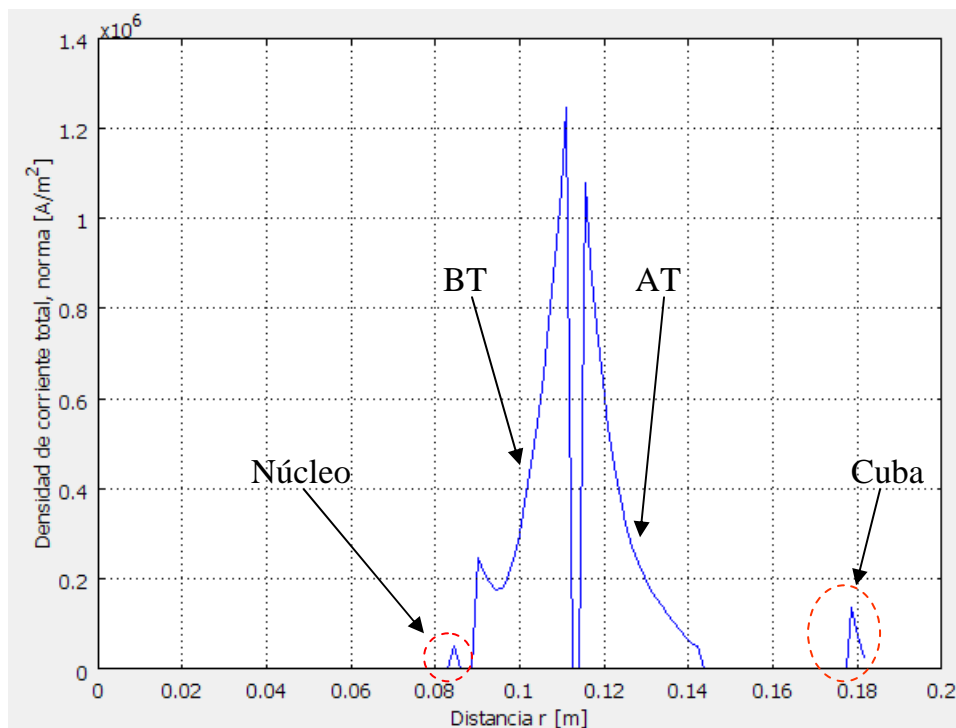


Figura 5.16. Densidad de corriente total considerando devanados en bloque y alta conductividad en el núcleo y en los arrollamientos.

Por contra, en la figura 5.17 las corrientes en el núcleo son inexistentes ya que su baja conductividad apenas deja circular corrientes Eddy; y la densidad de corriente en los arrollamientos es constante ya que por sus bajas conductividades no se produce efecto pelicular. Se observa como las corrientes en la cuba aumentan.

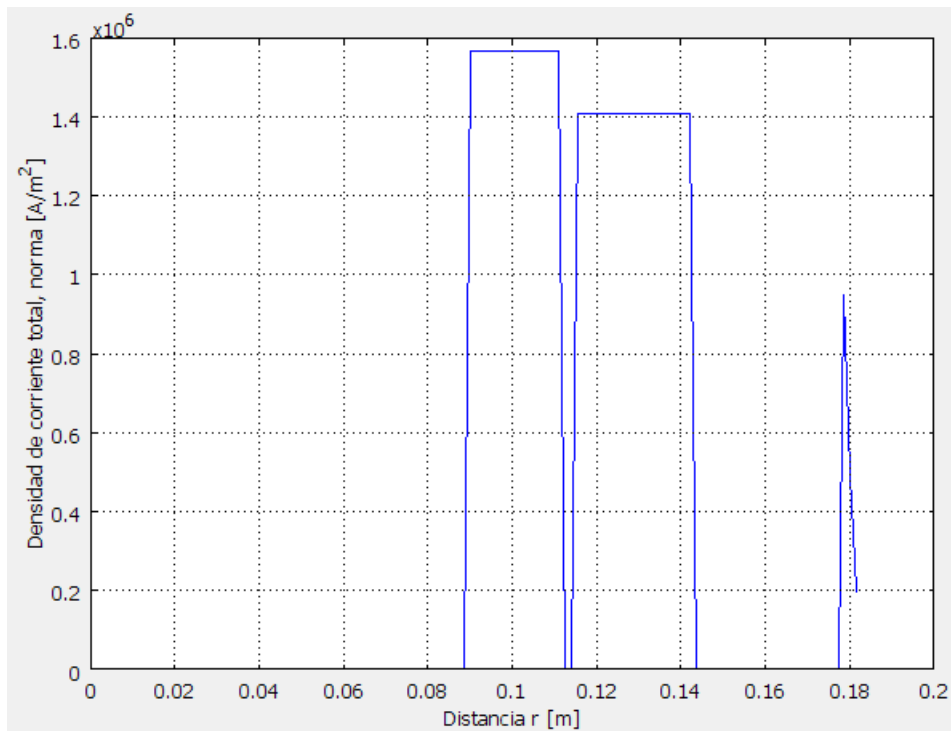


Figura 5.17. Densidad de corriente total considerando devanados en bloque y baja conductividad en el núcleo y en los arrollamientos.

Las propiedades de los materiales de los modelos con los arrollamientos a capas son las presentadas en la tabla 5.3.

Tabla 5.3. Características magnéticas y eléctricas de los materiales para los casos con los arrollamientos modelados a capas.

	Permeabilidad relativa μ_r	Conductividad σ [S/m]
Núcleo	7000	$1,12 \cdot 10^{-7}$
Baja Tensión	1	$5,998 \cdot 10^7$
Alta Tensión	1	$1 \cdot 10^7$
Aceite	1	0
Cuba	100	$1,03 \cdot 10^7$

En estos casos, las conductividades de los arrollamientos son las reales para el cobre porque al modelar los bobinados a capas sus secciones son pequeñas y el efecto pelicular también lo será, sin embargo en alta tensión es algo inferior para compensar el efecto que conlleva no constituir cada capa hilo a hilo y la forma rectangular real de los devanados. La conductividad del núcleo sigue siendo muy pequeña porque se ha modelado de forma maciza y continúan apareciendo corrientes Eddy inexistentes en el transformador real.

5.3.7. CONDICIONES DE FRONTERA

Para continuar con los modelos hay que definir primero las condiciones de frontera. Todas las fronteras de todos los subdominios deben estar condicionadas.

Las condiciones de los dos casos de arrollamientos en bloque y de los otros dos casos de arrollamientos a capas son las mismas:

- La frontera del eje de simetría se considera como condición de simetría axial, siendo lo adecuado para realizar el modelo axisimétrico. (En color azul en la figura 5.18).
- El resto de fronteras externas, pertenecientes a la cara superior, inferior y lateral de la cuba, se asumen con vector potencial magnético igual a cero, esto es, condición de aislamiento magnético. (En color verde en la figura 5.18).
- Todas las fronteras internas (de cuba, núcleo y arrollamientos) tienen condición de continuidad. (En color negro en la figura 5.18).

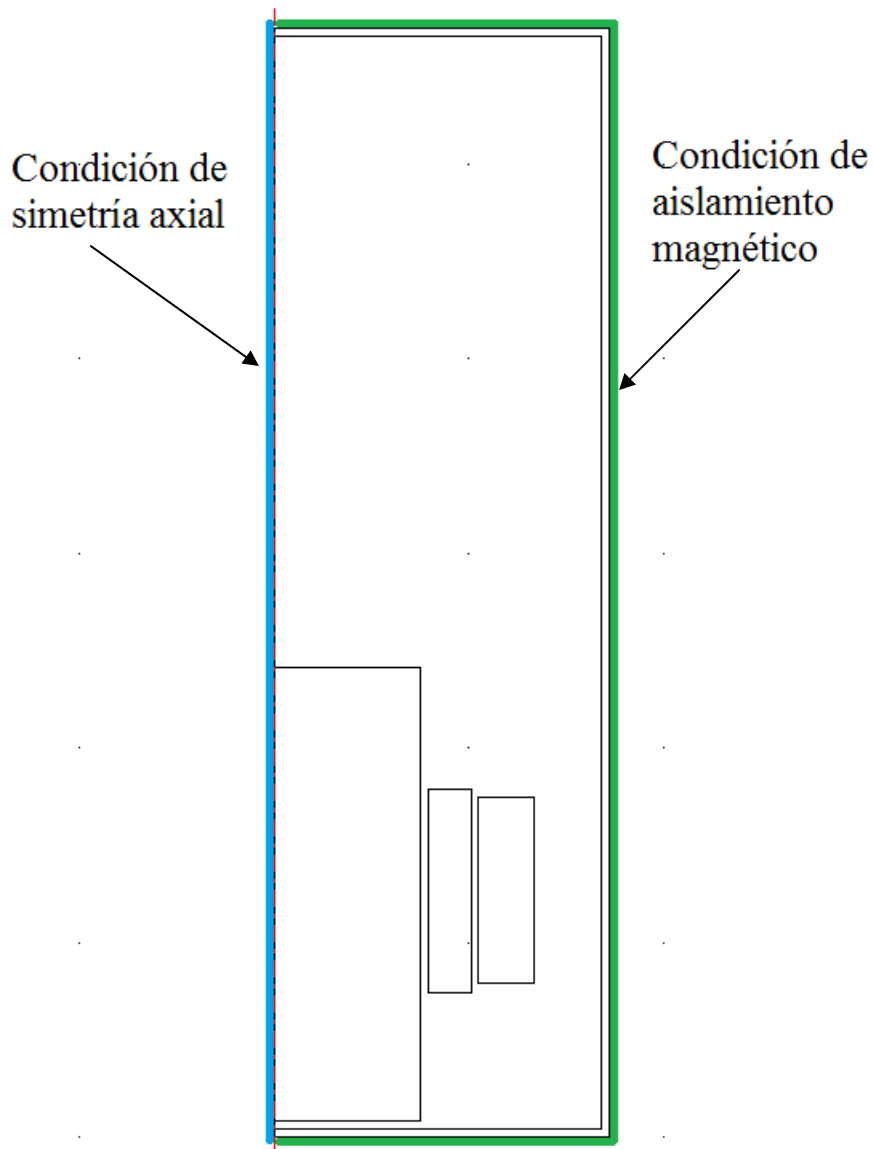


Figura 5.18. Vista frontal del transformador considerando aislamiento magnético.

5.3.8. DISCRETIZACIÓN DEL MODELO (MALLADO)

COMSOL realiza el mallado del modelo de manera automática y de forma progresiva cuando se combinan elementos muy pequeños, como las capas de los arrollamientos, con elementos muy grandes, como la zona ocupada por el aceite.

Se comenzaron las pruebas con un mallado grande y fácil de resolver, y progresivamente se fue reduciendo el tamaño de los elementos hasta las limitaciones de las características informáticas del ordenador utilizado.

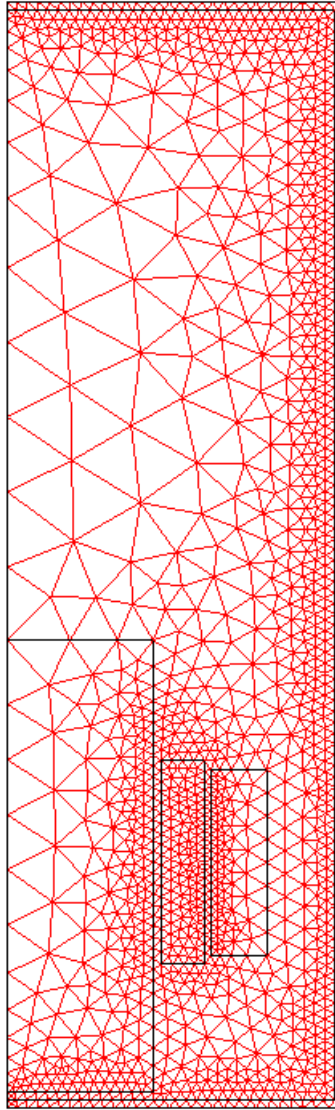


Figura 5.19. Primer mallado del plano del modelo.

En la figura 5.19 aparece el mallado que realiza el programa por defecto, dicho mallado tiene los elementos finitos muy grandes, lo que lleva a grandes errores en el cálculo.

La malla consta de 2800 elementos, el número de grados de libertad es 5789 y el tiempo de resolución es inferior a 1 segundo.

Por ello este mallado no es el correcto y se usa uno más reducido y de mayor exactitud.

Hay que tener en cuenta que se utiliza una malla muy refinada pero no infinitamente pequeña, lo que puede ser una principal fuente de error.

Para los modelos constituidos en bloques el mallado refinado ampliando la zona de los arrollamientos es el siguiente:

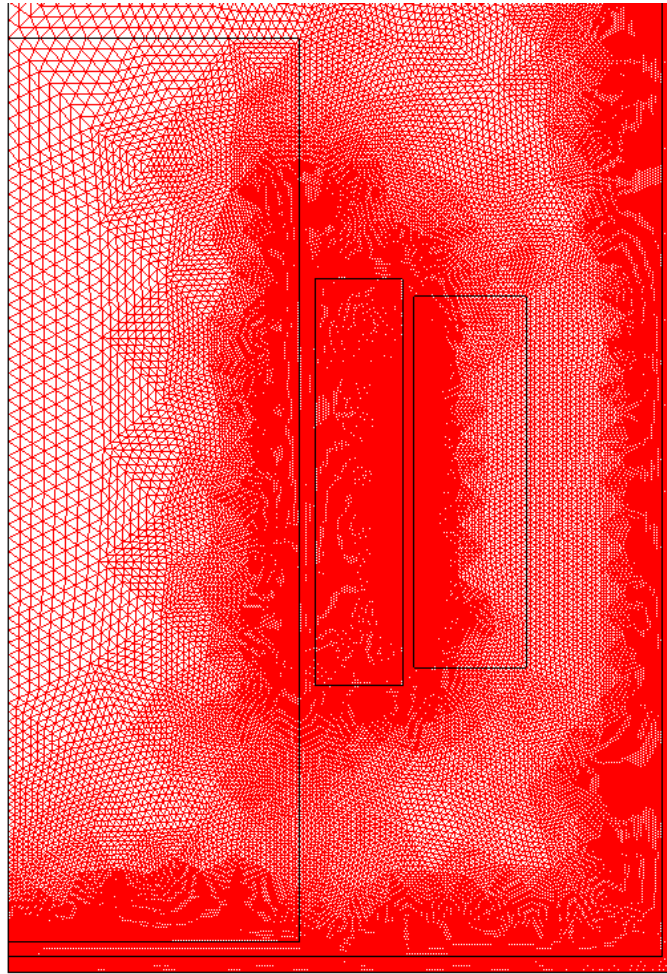


Figura 5.20. Mallado del plano de los modelos con arrollamientos en bloques.

En la figura 5.20 se observa que el mallado es muy pequeño en elementos estrechos, tales como la cuba o el canal entre arrollamientos, y por el contrario es más grande en elementos grandes tales como el núcleo.

La malla consta de 179200 elementos, el número de grados de libertad es 359905 y el tiempo de resolución es de 15 segundos. El número de elementos en este caso es mucho mayor y la resolución requiere más tiempo y memoria computacional.

Para los modelos constituidos a capas el mallado refinado ampliando la zona de los arrollamientos es el siguiente:

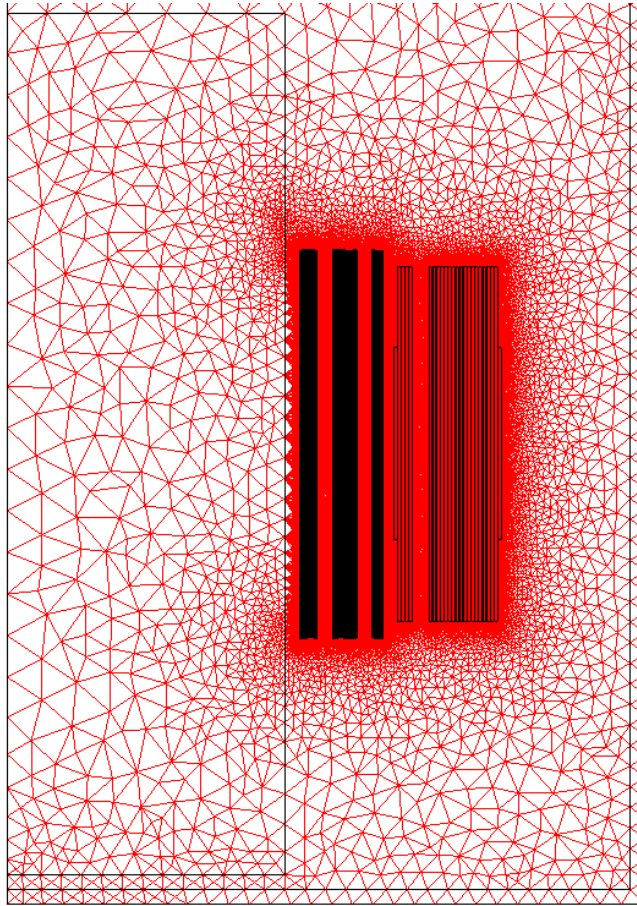


Figura 5.21. Mallado del plano de los modelos con arrollamientos a capas.

En la figura 5.21 el mallado en la cuba, núcleo y aceite es de mayor tamaño, ya que los valores que más precisión requieren son los de los arrollamientos, que son muy estrechos, donde hay una malla lo más infinitamente pequeña que la memoria del ordenador permite, consiguiendo así mayor exactitud.

La malla consta de 458211 elementos, el número de grados de libertad es 916644 y el tiempo de resolución es de 215 segundos, siendo el caso más complejo, de mayor gasto en recursos computacionales y de más tiempo de resolución.

Tras todo ello se realiza el procesado y postprocesado de los distintos modelos.

5.3.9. POSTPROCESAMIENTO

En este punto se exponen los resultados ofrecidos por COMSOL acorde con las características presentadas anteriormente correspondientes al capítulo 5, indicando sus particularidades y graficando sus flujos magnéticos.

5.3.9.1. CASO 1 (ESTÁTICO Y DEVANADOS EN BLOQUE)

En la figura 5.22 se representa la densidad de flujo magnético. Como era de esperar, aparece en el canal de refrigeración existente entre los arrollamientos de alta y baja tensión gran densidad de flujo. También cabe destacar la presencia de flujo en el núcleo, como es normal, así como en las paredes inferior y, sobre todo, lateral de la cuba.

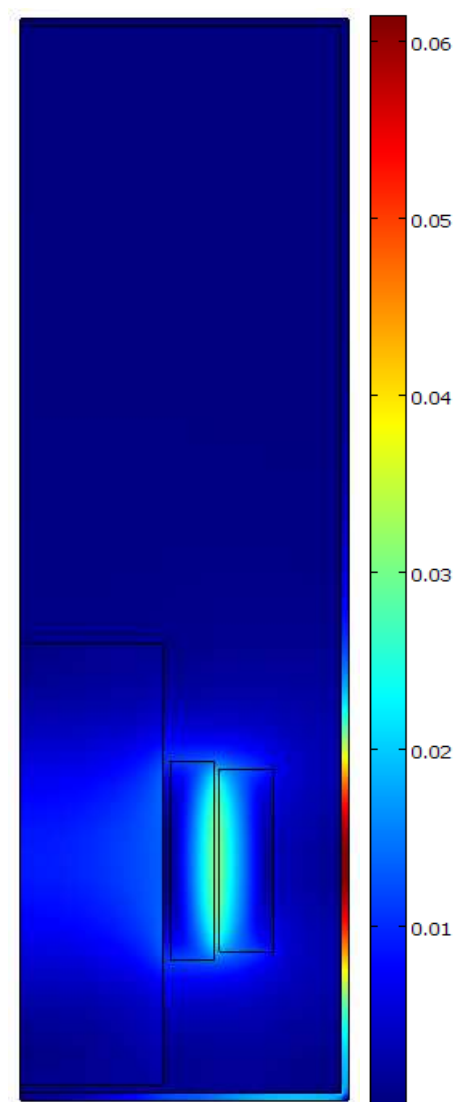


Figura 5.22. Densidad de campo magnético normal para el caso 1 medido en Teslas.

La inducción magnética teórica en el canal entre arrollamientos es:

$$B = \mu_0 \cdot H = \mu_0 \frac{N \cdot I}{l} = 0,031T \quad (5.13)$$

Donde:

l es la altura del canal entre arrollamientos en m.

Resultado que concuerda con el que aparece en la figura 5.23 perteneciente a un corte transversal del modelo.

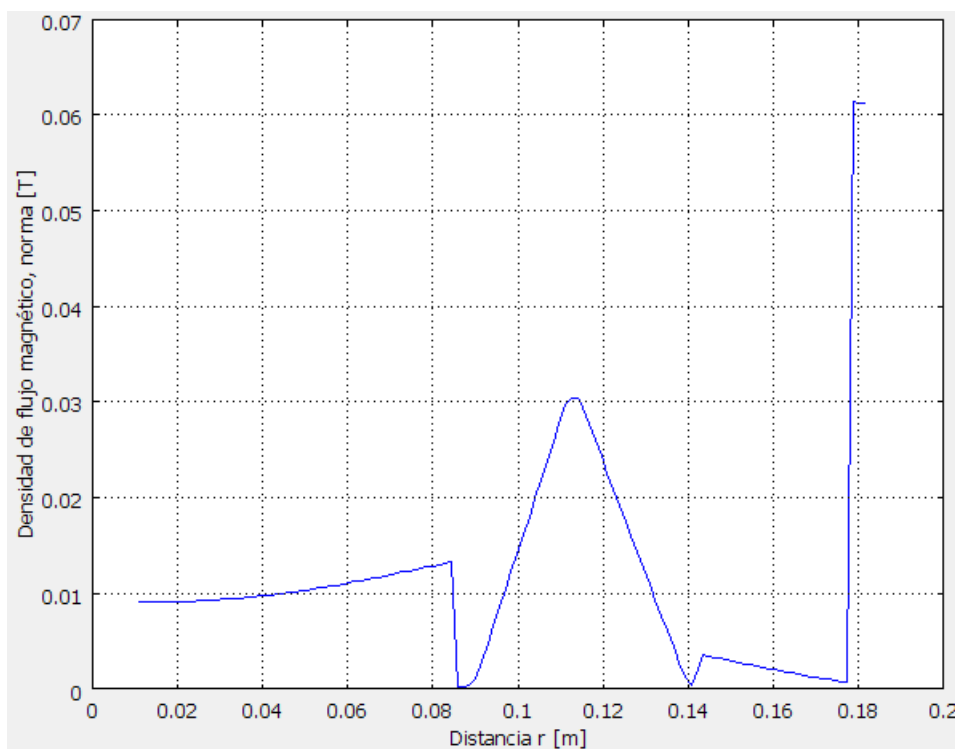


Figura 5.23. Densidad de flujo magnético a lo largo del radio por medio en un corte transversal para el caso 1.

Aparece un valor muy alto y constante en la cuba, debido en parte a su pequeño espesor (4 milímetros), también se aprecia densidad de flujo por el núcleo, que alcanza su máximo en sus bordes debido a la influencia de los arrollamientos al encontrarse tan cercanos, existiendo flujo disperso que circula tanto por la periferia de la cuba como por las zonas cercanas del aceite a los arrollamientos.

Por tratarse de un análisis estático, no existen pérdidas de potencia activa en la cuba.

5.3.9.2. CASO 2 (ARMÓNICO Y DEVANADOS EN BLOQUE)

En la figura 5.24 se representa la densidad de flujo magnético. La principal diferencia reside en la pared de la cuba, ya que el flujo ahora no es constante, sino que, por tratarse de corrientes alternas, hay mayor densidad en la periferia.

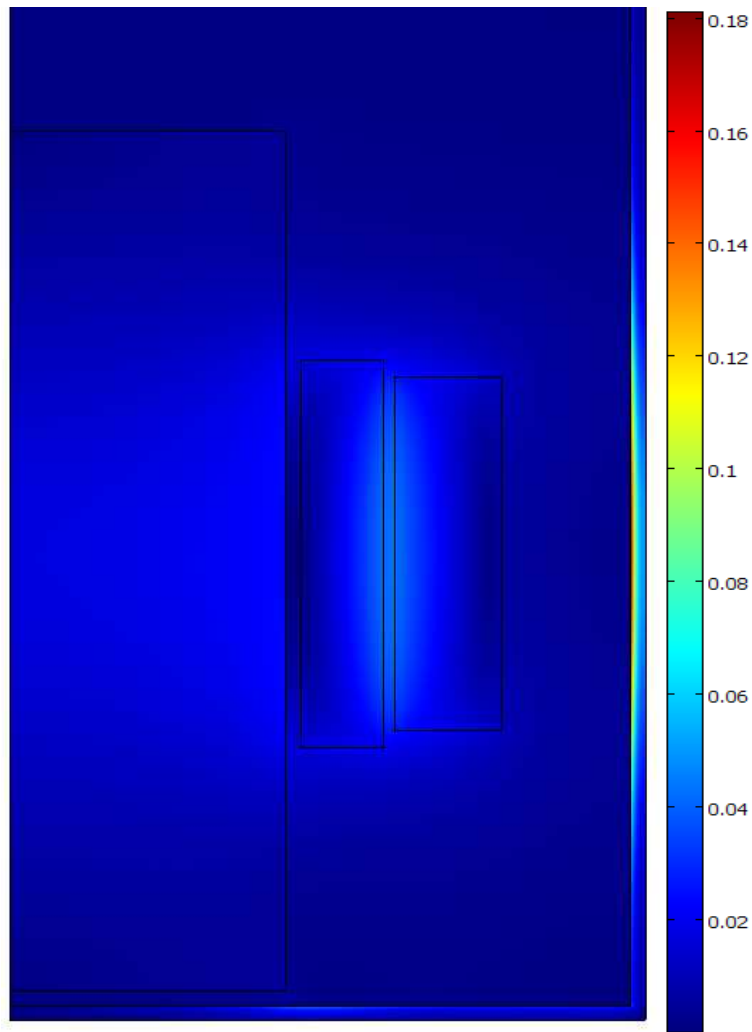


Figura 5.24. Densidad de campo magnético normal para el caso 2 medido en Teslas.

La inducción magnética en este caso deberá ser igual a la del caso estático multiplicada por $\sqrt{2}$ con lo que resulta:

$$B = \mu_0 \cdot H = \mu_0 \frac{N \cdot I \cdot \sqrt{2}}{l} = 0,044T \quad (5.14)$$

Que concuerda con los resultados mostrados por COMSOL en la figura 5.25.

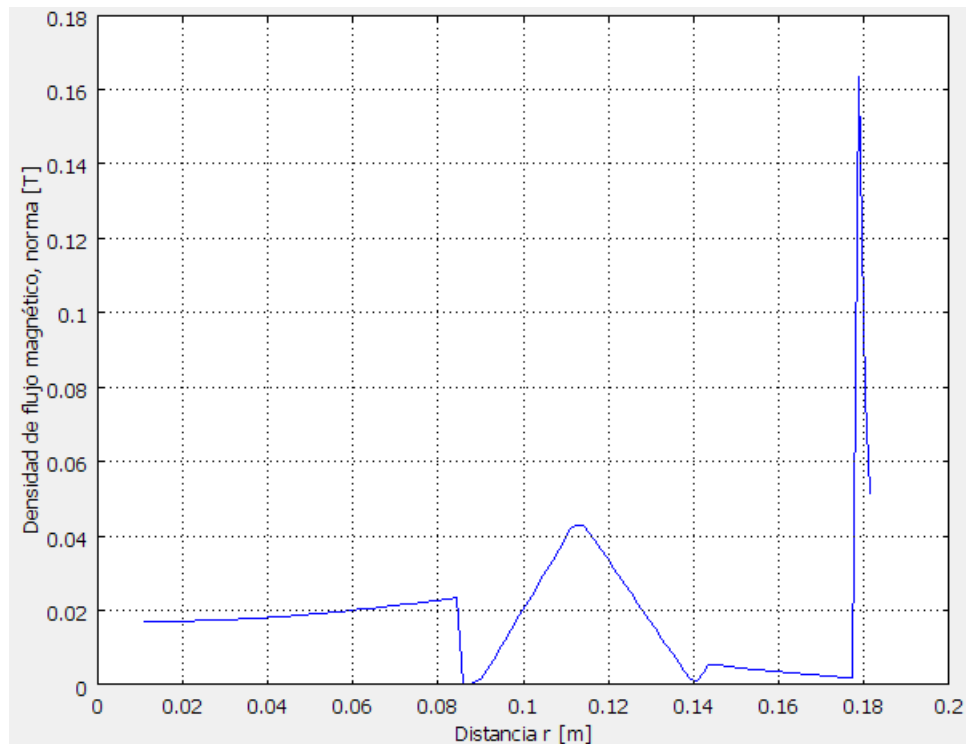


Figura 5.25. Densidad de flujo magnético a lo largo del radio por medio en un corte transversal para el caso 2.

En este caso, resolviendo el valor de la integral de volumen en la cuba, las pérdidas de potencia activa resultan:

$$P = 5,472W \quad (5.15)$$

5.3.9.2. CASO 3 (ESTÁTICO Y DEVANADOS A CAPAS)

La solución de este caso se parece en gran medida a la del primer caso por su semejanza. Cabe destacar que este modelo plasma mejor el modelo real y sus resultados son más cercanos a la realidad.

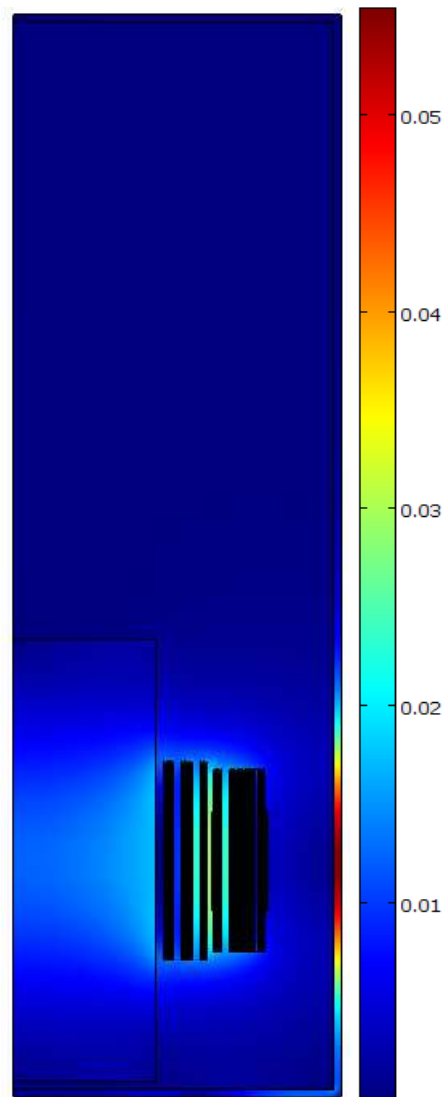


Figura 5.26. Densidad de campo magnético normal para el caso 3 medido en Teslas.

La inducción magnética debe ser igual a la del primer caso:

$$B = 0,031T \quad (5.16)$$

Como se aprecia en la figura 5.27.

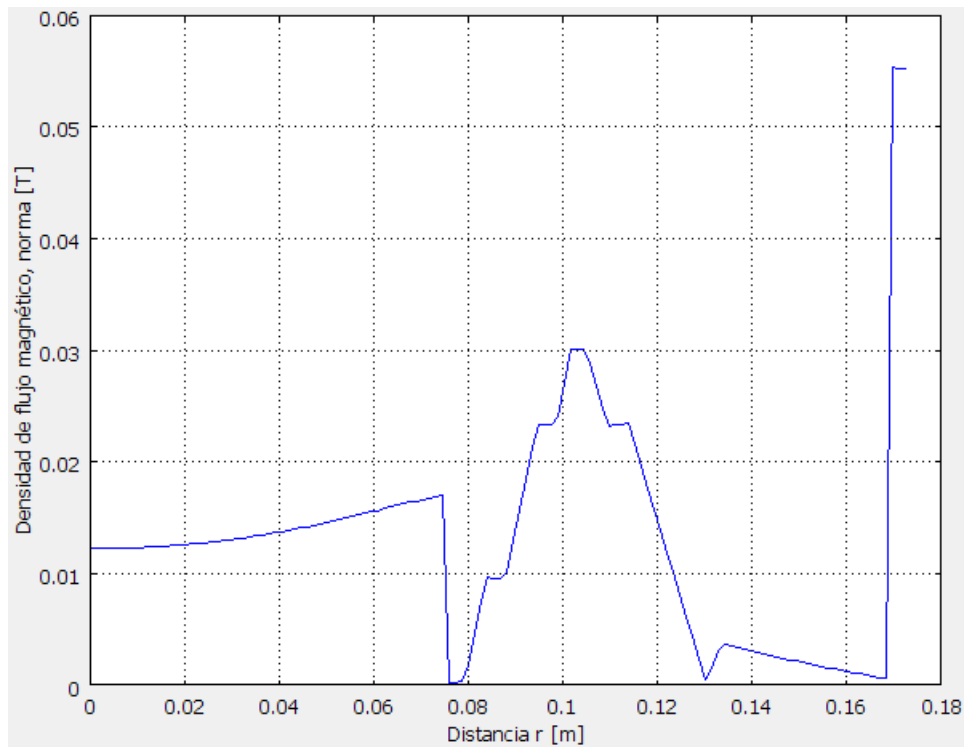


Figura 5.27. Densidad de flujo magnético a lo largo del radio por medio en un corte transversal para el caso 3.

Debido al aumento de precisión de este modelo, la densidad por el núcleo se ve incrementada, mientras que la de la cuba decrece. (Comparado con el caso 1). En la zona de los arrollamientos se observan dos franjas constantes en la subida y una en la bajada, correspondientes a los 3 canales de refrigeración de los arrollamientos.

Por tratarse de un análisis estático, no existen pérdidas de potencia activa en la cuba.

5.3.9.2. CASO 4 (ARMÓNICO Y DEVANADOS A CAPAS)

Este modelo se asemeja al caso 2, sus resultados son parecidos, pero se considera este modelo más exacto por su mayor aproximación a la realidad al tener los arrollamientos modelados a capas.

Este caso es el que posteriormente se tendrá en cuenta para comparar con los resultados tomados sobre el transformador real, por ser el más preciso de los cuatro modelos realizados.

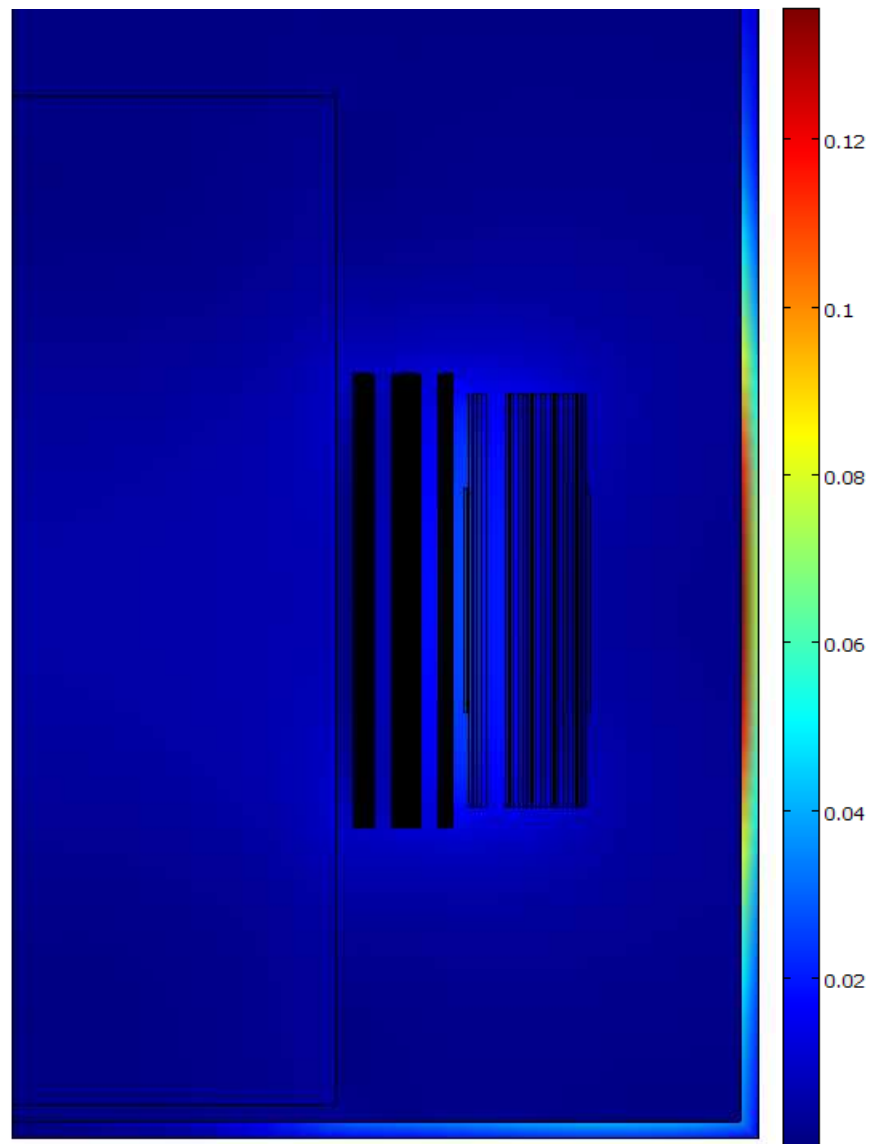


Figura 5.28. Densidad de campo magnético normal para el caso 4 medido en Teslas.

En la figura 5.28 aparece gran densidad de flujo por la cuba, debido a su pequeña anchura, a su alta permeabilidad y a su proximidad a los arrollamientos, entre otros factores.

En la figura 5.29 se observa el recorrido de las líneas de campo magnético. Se aprecia como en su mayoría circulan por el núcleo, algunas por la parte inferior y lateral de la cuba, y muy pocas escapan a la parte superior del transformador.

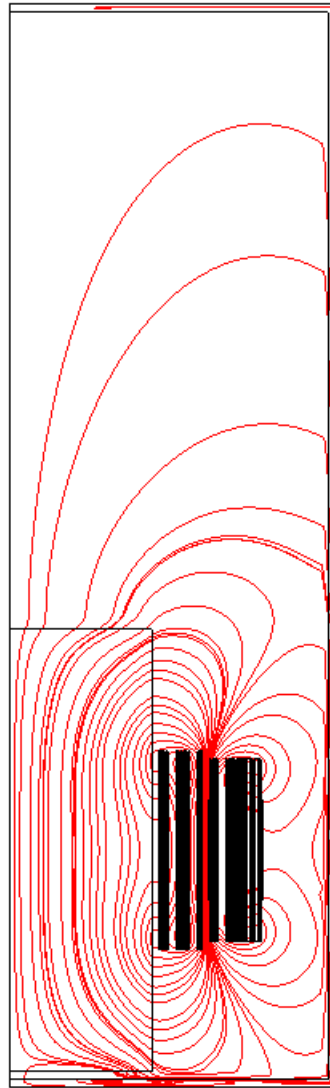


Figura 5.29. Líneas de campo magnético.

En este caso la inducción magnética es de valor reducido. Esto se debe a que entre arrollamientos aparece un campo magnético que se opone al campo magnético externo, resultando el total la suma de todos los campos.

Estos campos magnéticos opuestos son proporcionales a la frecuencia del estudio, 60Hz en este caso. Según la figura 5.30, la inducción magnética resulta:

$$B = 0,0257T \quad (5.17)$$

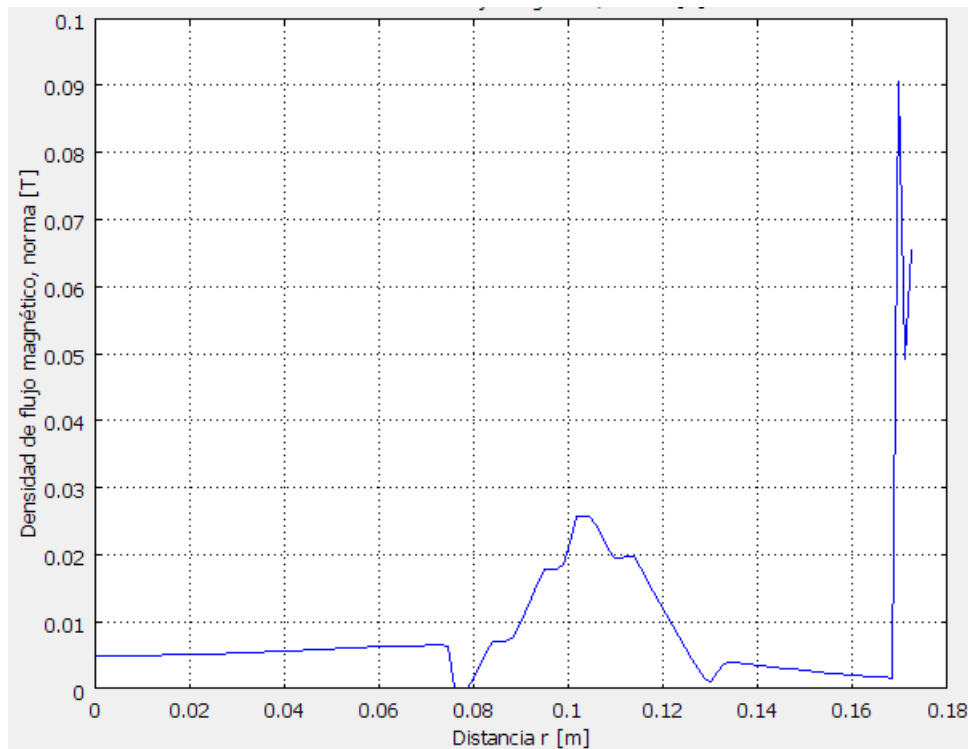


Figura 5.30. Densidad de flujo magnético a lo largo del radio por medio en un corte transversal para el caso 4.

Debido al decrecimiento de flujo entre arrollamientos, el flujo en el núcleo y en la cuba también se ve reducido. Además, en la cuba el flujo alcanza un mínimo en la zona central, debido a la circulación de corrientes Eddy y del efecto pelicular de éstas.

Los valores exactos de dicho flujo a lo largo de las distintas secciones de la cuba se encuentran expuestos en las figuras 5.31, 5.32 y 5.33.

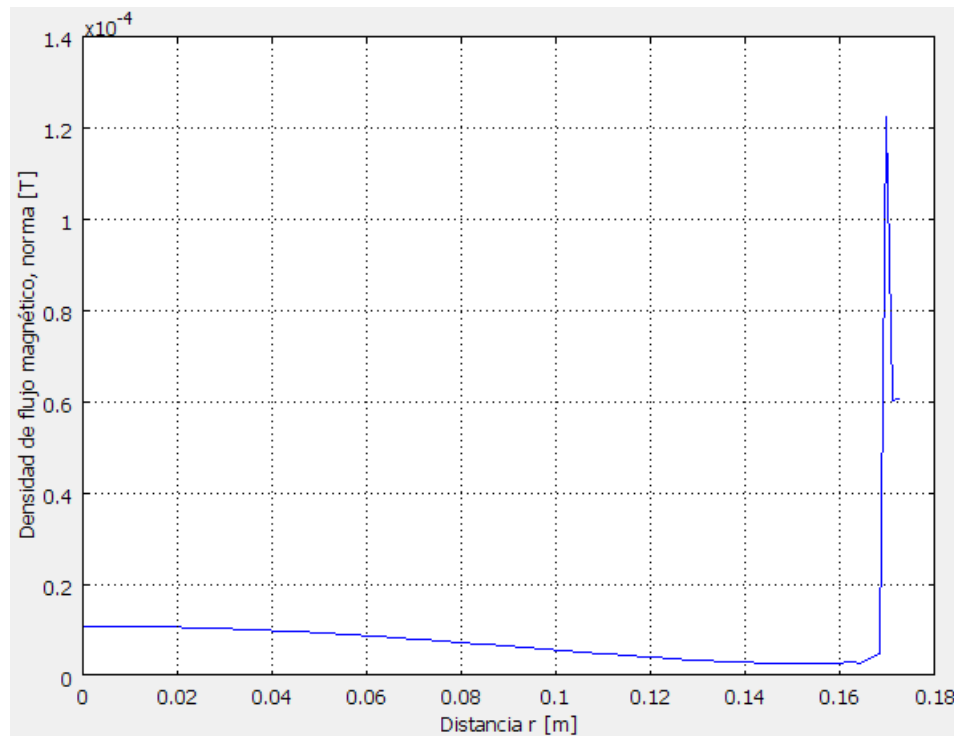


Figura 5.31. Densidad de flujo magnético a lo largo de la pared superior de la cuba.

En la figura 5.31 se representa la densidad de flujo magnético en la pared superior de la cuba respecto a la distancia al eje de simetría. (Ver figura 5.10). Se observa un flujo minúsculo y de relativamente poca importancia comparándolo con los que aparecen en las otras dos paredes de la cuba.

El valor máximo es de $1,22 \times 10^{-4}$ Teslas, y se alcanza a 0,1696 metros del eje de simetría, coincidiendo con la esquina de la cuba.

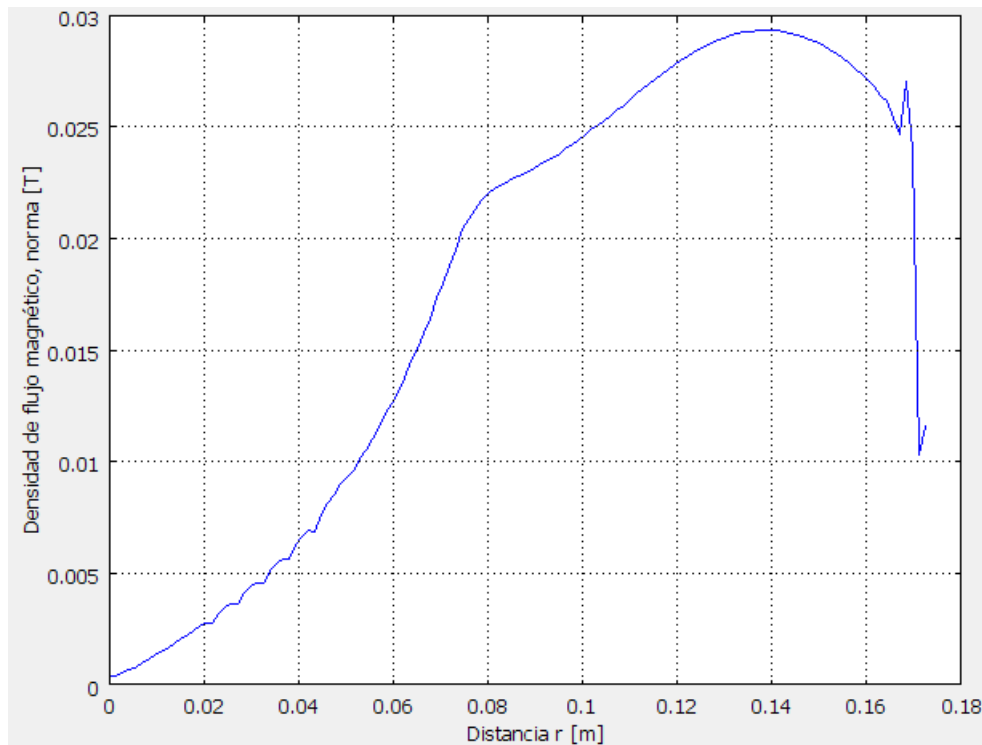


Figura 5.32. Densidad de flujo magnético a lo largo de la pared inferior de la cuba.

En la figura 5.32 se representa la densidad de flujo magnético en la pared inferior de la cuba respecto a la distancia al eje de simetría. (Ver figura 5.10). El flujo en esta pared es de interés de estudio, ya que son valores altos que pueden dar lugar a pérdidas de potencia bastante considerables.

El valor máximo es de 0,0293 Teslas, y se alcanza a 0,138 metros del eje de simetría, debido a que el flujo sale del núcleo por su parte inferior y prefiere cerrar su camino por la cuba, dado que tiene 100 veces más permeabilidad que el aceite.

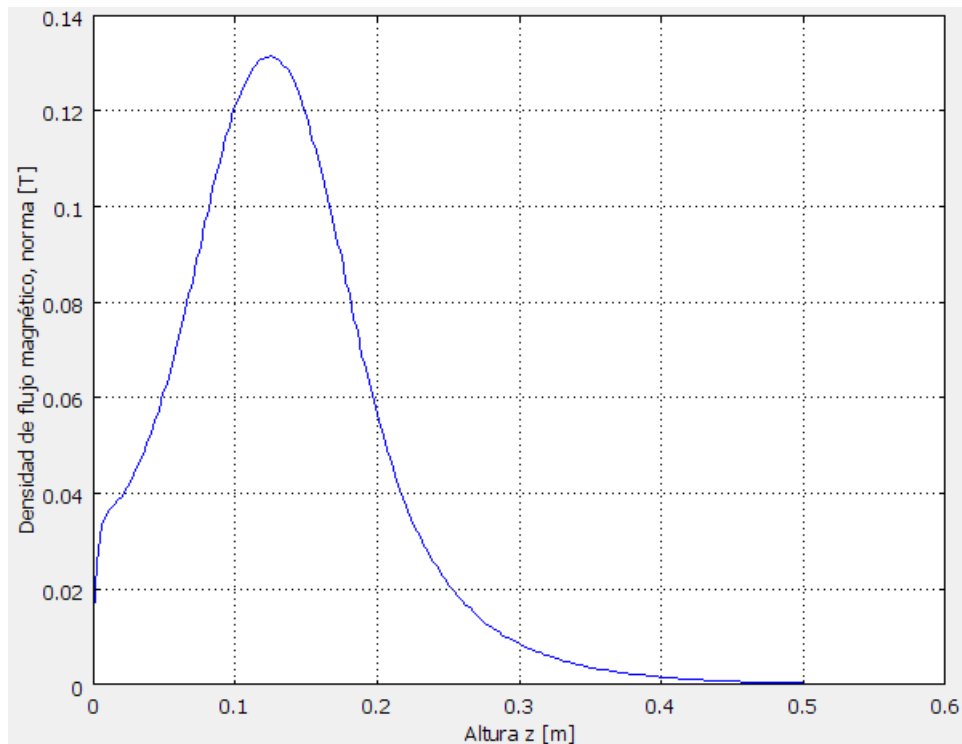


Figura 5.33. Densidad de flujo magnético a lo largo de la pared lateral de la cuba.

En la figura 5.33 se representa la densidad de flujo magnético en la pared lateral de la cuba respecto a su altura en el eje z . (Ver figura 5.10). El flujo en esta pared también resulta de gran interés ya que son valores suficientemente altos como para tenerlos en cuenta.

El valor máximo es de 0,131 Teslas, y se alcanza a 0,125 de altura de la cuba, coincidiendo con la mitad de la altura a la que se encuentran los arrollamientos y el núcleo. A partir de los 50 centímetros de altura los valores son muy pequeños.

El valor de la integral de superficie de la cuba del modelo realizado para la densidad de corriente total resulta:

$$I_{Eddy} = 301,62 A \quad (5.18)$$

El valor de la integral de volumen de la cuba para la densidad de corriente total dependiendo de la distancia al eje de simetría resulta:

$$I_{Eddy} = 302,89 A \cdot m \quad (5.19)$$

El valor de pérdidas integrando todo el volumen de la cuba para este modelo, ofrecido por COMSOL, es:

$$P = 5,022W \quad (5.20)$$

Este resultado es notablemente inferior al obtenido con los arrollamientos en bloque, ya que aquel modelo no era lo bastante preciso.

A la finalización del presente estudio se observa la aparición de circulación de flujo a lo largo de la cuba, cuya magnitud es de importancia (ver figuras 5.31, 5.32 y 5.33). Dicho flujo da lugar a la circulación de corrientes Eddy en la cuba, que a su vez dan lugar a las pérdidas de potencia activa de (5.20).

5.3.10. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para analizar los resultados sólo se tendrá en cuenta el último modelo por ser el que más se aproxima a la realidad.

Primeramente se exponen los resultados de las pruebas reales sobre el transformador, seguidamente se comparan esos resultados con los obtenidos mediante el modelo en COMSOL y por último se definen las principales fuentes de error que pueden hacer que el valor teórico y el valor práctico difieran.

5.3.10.1. PRUEBAS SOBRE EL TRANSFORMADOR REAL

Las pruebas realizadas sobre el transformador real mostraron los siguientes resultados:

Tabla 5.4. Resultados de las pruebas sobre el transformador real.

P_{cc}	Pérdidas en cortocircuito	187,61W
P_{Rl}²	Pérdidas en los devanados	171,87W
P_{ad}	Pérdidas adicionales	15,74W

Donde:

$$P_{cc} = P_{RI^2} + P_{ad} \quad (5.21)$$

Las pérdidas adicionales corresponden a la suma de las pérdidas por corrientes inducidas en los propios devanados y las pérdidas por corrientes inducidas en el resto de elementos estructurales del transformador, incluida la cuba. A continuación se comparan estos resultados con los ofrecidos en el modelo realizado en COMSOL.

5.3.10.2. COMPARACIÓN CON LOS RESULTADOS DEL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Las pérdidas totales, ofrecidas por COMSOL son:

$$P_{COM} = 183,62W \quad (5.22)$$

Las pérdidas en cortocircuito, medidas sobre el transformador real (ver tabla 5.4.) son:

$$P_{Real} = 187,61W \quad (5.23)$$

Ambos valores son muy aproximados, el resultado de la simulación resulta ser un 2.127 % inferior.

Las pérdidas en la cuba, ofrecidas por COMSOL son:

$$P = 5,022W \quad (5.24)$$

Las pérdidas adicionales, medidas sobre el transformador real (ver tabla 5.4.) son:

$$P_{Real} = 15,74W \quad (5.25)$$

Sin embargo, antes de comparar estos resultados se debe hacer un ajuste. En el transformador real las pérdidas no se dan en toda la periferia de la cuba, sino que la inmensa mayoría se da en aquellas secciones más próximas a los arrollamientos. En la figura 5.34 se han realizado dos cortes en color verde, que dividen la cuba en 4 zonas:

-Las dos zonas en color verde son las que tendrán pérdidas importantes.

-Las dos zonas en color negro tienen unas pérdidas ínfimas.

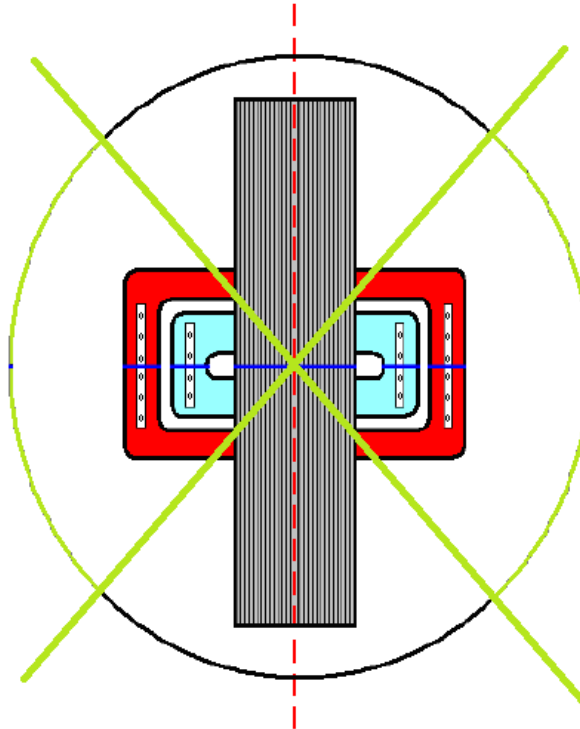


Figura 5.34. Zonas de la cuba con pérdidas.

En el modelo en COMSOL se realizó la integral de volumen completa, pero sólo se debe estimar la mitad de este valor ya que, aproximadamente, sólo en la mitad de la cuba se producen pérdidas.

Las pérdidas finales obtenidas por simulación resultan:

$$P = 2,511W \quad (5.26)$$

El resultado de (5.26) difiere notablemente de las pérdidas adicionales medidas sobre el transformador, pero se debe tener en cuenta que las pérdidas adicionales son aquellas producidas no sólo en la cuba, sino también en el resto de elementos constructivos. Además pueden existir fuentes de error, destacadas en el punto 5.3.10.3.

5.3.10.3. POSIBLES FUENTES DE ERROR

Las fuentes de error que hacen que los resultados no concuerden exactamente son las siguientes:

- El mallado se ha realizado lo más pequeño posible teniendo en cuenta las limitaciones computacionales. Si los elementos finitos hubiesen sido aún más pequeños, los resultados tendrían más exactitud.

- El devanado de alta tensión se modeló como una capa entera y no por hilos, como está constituido realmente.

- No se han considerado las influencias de los terminales ni del cambiador de tomas de los bobinados.

- Se ha considerado un modelo axisimétrico con corrientes acimutales de tal forma que se suponen los arrollamientos perfectamente circulares (en la realidad son algo ovalados) y el núcleo como una sola columna (en realidad tiene 3).

- En las medidas reales puede haber condiciones distintas a las teóricas (temperatura, humedad, imperfecciones, suciedad...).

- Los valores de conductividad y permeabilidad de los materiales han sido obtenidos de la librería de COMSOL, pudiendo diferir de los valores reales.

- Redondeo en algunos cálculos y medidas.

6. Conclusiones

6.1. IMPORTANCIA DEL ESTUDIO

Ya se ha destacado en varias ocasiones a lo largo de la memoria la importancia del estudio de los transformadores, por su abundante aparición a lo largo de todo el sistema eléctrico.

Después de realizar el estudio cabe destacar la aparición de pérdidas en la cuba siguiendo el Método de los Elementos Finitos, las cuales pueden llegar a ser de gran importancia y deben ser estudiadas con detenimiento, para hacer dichas pérdidas lo más pequeñas posibles.

6.2. INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En los transformadores de potencia aparecen pérdidas de potencia activa en los elementos estructurales, tales como la cuba, tornillos, o latiguillos de salida. Las pérdidas en la cuba son de gran importancia por ser el elemento estructural de mayor tamaño.

Las pérdidas aparecen por la circulación de flujo a través de la cuba, que da lugar a corrientes Eddy. Estas corrientes deben ser consideradas y reducidas en la medida de lo posible.

El Método de los Elementos Finitos resulta sencillo de utilizar y proporciona resultados muy fiables en una, dos y tres dimensiones. Se puede aplicar a multitud de problemas físicos y de ingeniería por complejos que sean.

COMSOL Multiphysics es una herramienta muy potente para la resolución de problemas mediante Elementos Finitos, debido a su enorme rango de aplicación y su facilidad de uso.

Se ha realizado un modelo axisimétrico con corrientes acimutales para estudiar el flujo en la cuba y las pérdidas a las que da lugar.

El estudio se ha realizado comenzando con un modelo básico de un caso real que sirviese como referencia y consolidación, y poco a poco se ha ido aproximando al caso real. Así se ha llegado al último modelo con la confianza de saber que los resultados eran cercanos a los reales.

El discretizado y el procesamiento del modelo han sido lo más refinados posibles según las limitaciones de la informática, pudiendo existir cierto margen de error.

El orden de magnitud de las pérdidas obtenidas mediante el modelo de elementos finitos es aproximado al obtenido en las pruebas sobre el transformador, lo cual da confianza para su uso en problemas de este tipo.

6.3. FUTUROS DESARROLLOS

Se ha destacado durante buena parte del proyecto las limitaciones computacionales a la hora de utilizar el Método de Elementos Finitos. Con el avance de la tecnología, se conseguirán resultados cada vez más eficaces y con menor error.

El Método de los Elementos Finitos está muy extendido actualmente y se consolida como uno de los mejores sistemas de resolución para este tipo de problemas de cara al futuro.

Si se desea realizar un modelo más exhaustivo del transformador, se debe modelar en tres dimensiones y realizar la geometría exacta, así como utilizar elementos finitos lo más pequeños posibles dentro de las limitaciones computacionales.

El modelo realizado puede ser usado también como base para buscar soluciones que reduzcan las pérdidas calculadas.

7. Bibliografía

7.1. LIBROS Y ARTÍCULOS

[1] Ministerio de industria, turismo y comercio 2010. Instalaciones de distribución, tanto aéreas como subterráneas.

[2] Kulkarni, S.V. & Khaparde S.A.: “*Transformer Engineering. Design and Practice*” (Marcel Dekker, 2004)

[3] Karsai, K.; Kerényi, D.; Kiss, L.: “*Large Power Transformers*” (Studies in Electrical and Electronic Engineering, Vol. 25, Akadémiai Kiadó, 1987)

[4] Del Vecchio, R.M.; Feeney, M.E.; Feghali, P.T.; Shah D.M.; Ahuja, R.; Poulin, B.: “*Transformer Design Principles: With Applications to Core-Form Power Transformers*” (CRC Press, 2002)

[5] Tipler, P.A.: “*Física para la Ciencia y la Tecnología*” (Ed. Reverté, Vol. 2, 1999)

[6] Lorrain, P. & Corson, D.: “*Campos y ondas electromagnéticas*” (Selecciones Científicas, 1972)

[7] Rizzo, M.; Savini, A.; Turowski, J.: “*Influence of Flux Collectors on Stray Losses in Transformers*” (IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 36, N° 4, 2000)

[8] Toro, R.: “*Cálculo del Flujo en la Ventana de un Transformador mediante el Método de las Redes de Reluctancia*” (Proyecto Fin de Carrera, Universidad Carlos III de Madrid, 2011)

[9] Silvester, P.P.: “*Elementos Finitos en Ingeniería Eléctrica*” (Limusa, 1989)

[10] Allcock, R.; Holland, S.; Haydock, L.: “*Calculation of Zero Phase Sequence Impedance for Power Transformers using Numerical Methods*” (IEEE Transactions on Magnetics, Vol 31, N° 3, 1995)

[11] Valkovic, Z.: “*Calculation of the losses in three-phase transformer tanks*” (IEE PROC, Vol. 127, Pt. C, N° 1, 1980)

[12] Lopez-Fernandez, X.M.; Soto, A.; Souto, D.; Turowski, J.; Couto, D.: “*Software for Fast Interactive Three-Dimensional Modeling of Electromagnetic Leakage Field and Magnetic Shunts Design in Shell Type Transformers*” (International Conference on Electrical Machines, 2008)

[13] Szabados, B.; El Nahas, I.; El Sobki, M.S.; Findlay, R.D.; Poloujadoff, M.: “*A new Approach to determine Eddy Current Losses in the Tank Walls of a Power Transformer*” (IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. PWRD-2, N° 3, 1987)

[14] Poloujadoff, M.; El Nahas, I.; Szabados, B.; Findlay, R.D.; Lee, S.; Burke, P.; Perco, D.: “*Three Dimensional Flux Calculation on a Three-Phase Transformer*” (IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. PWRD-1, N° 3, 1986)

[15] Mailhot, M.; Ngnegueu, T.; Munar, A.; Sacotte, M.: “*Zero Phase Sequence Impedance and Tank Heating Model for Three Phase Three Leg Core Type Power Transformers Coupling Magnetic Field and Electric Circuit Equations in a Finite Element Software*” (IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 31, N° 3, 1995)

[16] Escobar, A. & Betancourt, G.: “*Cálculo de los Valores Máximos de Campo Magnético utilizando el Método de los Elementos Finitos*” (Scientia et Technica Año XII, No 30, UTP, 2006)

[17] Lopez-Fernandez, X.M.: “*Finite Element Method Applied to Desing and Analysis in Power Transformers*” (ARWtr, 2010)

[18] Jianming, J.: “*The Finite Elements Method in Electromagnetics*” (John Wiley & Sons, 1993)

[19] COMSOL Multiphysics: “*COMSOL Documentation*” (Guía de ayuda para el usuario, 2011)

[20] Vergara, J.A.: “*Reducción de Pérdidas por Flujos de Dispersión en Transformadores de Distribución*” (Universidad del Valle, Proyecto de Grado, 2008)

7.2. PÁGINAS Y DOCUMENTOS ELECTRÓNICOS EN LA RED

[21] Herramienta informática COMSOL Multiphysics: www.comsol.com (Accedido en 2011)